# Cours de Mathématiques DEUG SSM

Thierry Nkaoua
Université de Marne La Vallée

# 1. Généralités.

## 1.1 Introduction.

Ce document est le support du cours de mathématiques donné à l'Université de Marne La Vallée en DEUG SSM. Il suit d'assez près le cours tel qu'il est donné en amphi. Il contient parfois des démonstrations qui ne sont qu'esquissées ou admises pendant le cours. On a essayé d'y inclure des commentaires ou des conseils qui sont plutôt du domaine du cours oral que de l'écrit. On espère ainsi qu'il pourra constituer une véritable base de travail pour les étudiants.

## 1.2 Conseils d'organisation du travail.

Les conseils qui suivent peuvent paraître ridiculement "élémentaires". Cependant, l'expérience prouve que la plupart des difficultés rencontrées dans l'apprentissage des mathématiques proviennent du non respect de ces règles.

Il est très important d'aborder tout cours de mathématiques en respectant un ordre d'apprentissage. Pour faire des exercices ou des problèmes, on a besoin des outils que sont les **théorèmes**. Mais il faut aussi savoir se servir de ces outils, c'est à dire non seulement connaître leur fonctionnement (hypothèses, conclusions), mais aussi les objets sur lesquels il agissent et donc connaître les **définitions** de tous les objets du monde mathématique que l'on doit manipuler.

Ce constat simple doit donc conduire en premier lieu à une connaissance parfaite des définitions (savoir ce qu'est une scie ou un marteau), ensuite des théorèmes (une scie découpe, un marteau cloue), et uniquement dans un dernier temps à la résolution d'exercices ou de problèmes (construire une cabane ou un radeau)...

Il est fortement conseillé de refaire les démonstrations des théorèmes (sauf celles signalées par une $*$ trop techniques ou trop difficiles), car elles permettent de manipuler les définitions et de s'imprégner du contenu des théorèmes.

Je vous suggère donc le plan de travail suivant :

1/ Apprendre les définitions,

2/ Apprendre les théorèmes (notamment les **hypothèses**),

3/ Refaire les démonstrations du cours,

4/ Lire les démonstrations difficiles (*),

5/ Faire les exercices proposés en cours,

6/ Préparer les exercices de TD.

L'ordre d'apprentissage proposé est fondamental. Au risque de se répéter, il est inutile de faire des exercices sans maîtriser parfaitement les théorèmes, et tout aussi inutile d'apprendre les théorèmes sans connaissance des définitions...

Bon courage !

## 1.3 A propos du raisonnement.

### 1.3.1 Implications.

Il est un “signe” sur lequel il semble important de s'attarder :

$$\Longrightarrow$$

Quelle est la signification de :

$$P \Longrightarrow Q$$

Dans cette expression, $P$ et $Q$ représentent des “phrases” qui peuvent être vraies ou fausses. Par exemple, $P$ peut être : 'Il pleut' et $Q$ par exemple : 'J'ai mon parapluie'. Ces deux phrases peuvent être vraies ou fausses (il arrive qu'il ne pleuve pas et je n'ai pas toujours mon parapluie...).

$$Que\, signifie\, alors\ : P \Longrightarrow Q\ ?$$

Cela signifie que **SI** il pleut, **ALORS** j'ai mon parapluie. Il est fondamental de bien saisir que cette phrase n'entraîne nullement qu'il pleuve ou que j'ai mon parapluie... Autrement dit, $P \Longrightarrow Q$ n'indique rien sur la véracité de $P$ ou de $Q$. Ainsi la “phrase” :

$$(3 = 0) \Longrightarrow (4 = 1) \text{ EST VRAIE !}$$

alors que (évidemment) on n'a pas $3 = 0$, ni $4 = 1$. Essayez de vous en convaincre ! (ou de le démontrer, c'est mieux).

Pour en revenir à la météorologie, la seule conclusion que vous pouvez tirer de $P \Longrightarrow Q$, est que si vous voyez la pluie tomber, vous êtes sûr que j'ai mon parapluie.

*(Petits) exercices.*

Que pouvez vous déduire (en supposant $P \Longrightarrow Q$) :

si je n'ai pas mon parapluie ?

si j'ai mon parapluie ?

s'il pleut ?

s'il ne pleut pas ?

Dans la pratique, une implication se démontre en supposant $P$ vraie et en essayant d'établir $Q$.

On peut aussi utiliser ce que l'on nomme la contraposée de $P \Longrightarrow Q$ :

$$non\ Q \Longrightarrow non\ P$$

On peut en effet démontrer que la véracité de la contraposée coïncide exactement avec celle de l'implication de départ. C'est à dire que :

**"S'il pleut j'ai mon parapluie"**
revient à dire
**"Si je n'ai pas mon parapluie,alors il ne pleut pas"**

### 1.3.2 Raisonnement par l'absurde.

Si l'on veut démontrer que la proposition $R$ est vraie, faire un raisonnement par l'absurde revient à supposer que $R$ est fausse et arriver à une absurdité.

Par exemple, démontrons (en utilisant des propriétés admises des entiers naturels) qu'il existe une infinité de nombres premiers (dont les seuls diviseurs sont 1 et eux-mêmes). Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer qu'il existe un nombre fini de nombres premiers et d'aboutir à une absurdité. S'il y a un nombre fini de nombres premiers, il y a alors un nombre premier $p$ plus grand que tous les autres. Considérons alors $n = p! + 1$. Cette écriture de $n$ montre que $n$ n'est divisible par aucun des entiers $2, 3, ..., p$, puisque le reste de la division de $n$ par $2, 3, ..., p$ est 1. Donc soit $n$ est premier (contradiction puisque $n > p$), soit il admet un diviseur premier $> p$ (contradiction). L'hypothèse de départ est donc fausse et il y a une infinité de nombres premiers.

Si l'on veut démontrer la proposition $P \Longrightarrow Q$, faire un raisonnement par l'absurde revient à supposer que $P$ est vraie et $Q$ fausse et arriver à une absurdité.

### 1.3.3 Equivalence.

$P \Longleftrightarrow Q$ signifie :

$$P \Longrightarrow Q \; et \; Q \Longrightarrow P$$

La démonstration d'une équivalence consiste la plupart du temps à faire 2 démonstrations, l'une pour $P \Longrightarrow Q$, et l'autre pour $Q \Longrightarrow P$. On peut aussi "enchaîner" des équivalences, mais on est alors en devoir de justifier chacune des équivalences...

D'une manière générale, essayez de rédiger en utilisant le moins de signes d'implication et d'équivalence. Une phrase en français vous évitera souvent bien des erreurs...

### 1.3.4 Contraire d'une proposition.

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de $x$ élément d'un ensemble $E$. Le contraire de :

$$\forall x \in E \; P(x) \; vraie$$

est :

$$\exists x \in E \;\; P(x) \;\; fausse$$

En effet, le contraire de “tout le monde vérifie $P$” est “il y en a un qui ne vérifie pas $P$. On peut remarquer que le contraire de $\forall$ est, en quelque sorte, $\exists$, bien que cela ne veuille pas dire grand chose rigoureusement... Le contraire de “tous font quelque chose” est “il y en a un qui fait le contraire”...

## 1.4 Notions élémentaires de théorie des ensembles.

### 1.4.1 Opérations sur les ensembles.

Il n'est naturellement pas question ici de “faire” la théorie des ensembles. On rappelle simplement quelques notions élémentaires.

Par exemple, on rappelle qu'il existe un “**interdit**” fondamental qui est d'écrire si $A$ est un ensemble : $A \in A$. Il est interdit d'écrire $A \in A$, car cela débouche sur des absurdités. En effet, on aurait le droit de considérer l'ensemble :

$$E = \{ensembles\, A \,/\, A \notin A\}$$

On est alors en droit de se poser la question de savoir si $E \in E$ ou $E \notin E$. Si $E \notin E$ alors $E \in E$ par définition de $E$ et contradiction; si $E \in E$, alors $E \notin E$ toujours par la définition de $E$ et contradiction. On n'a donc ni $E \in E$ ni $E \notin E$. On obtient donc une proposition telle que ni elle ni son contraire sont vraies, ce qui est contraire à une logique “classique”.

Si $A$ et $B$ sont deux ensembles, on a les définitions :

$$\begin{array}{l} A \cup B = \{x/ \; x \in A \; ou \; x \in B\} \\ A \cap B = \{x/ \; x \in A \; et \; x \in B\} \\ A \backslash B = \{x/ \; x \in A \; et \; x \notin B\} \end{array}$$

On dit que $A$ est inclus dans $B$ si et seulement si (ssi) tous les éléments de $A$ sont éléments de $B$ :

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A \; x \in B$$

On dit aussi que A est un sous ensemble de B.

On appelle produit cartésien de $A$ par $B$, l'ensemble des couples dont la première composante appartient à $A$ et la deuxième à $B$ :

$$A \times B = \{(x,y)/x \in A \; et \; y \in B\}$$

### 1.4.2 Fonctions, applications.

On suppose connue la définition “intuitive” d'une fonction $f$ d'un ensemble $A$ dans un ensemble $B$, qui associe 1 ou 0 élément (image) de $B$ aux éléments de $A$.

L'ensemble des éléments de $A$ qui ont 1 image dans $B$ s'appelle le domaine de définition de $f$. Une fonction de $A$ dans $B$ qui admet $A$ pour domaine de définition est une application de $A$ dans $B$.

Soit $f$ une application de $A$ dans $B$.

On dit que $f$ est injective (ssi) 2 éléments distincts de $A$ ont des images distinctes dans $B$, ce qui se traduit par :

$$\forall x, y \in A \; f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Il est fondamental de comprendre cette implication, car c'est de cette manière que l'on démontre dans la pratique qu'une application est injective.

On dit que $f$ est surjective ssi tout élément de $B$ est l'image d'au moins 1 élément de $A$ (ou bien tout élément de $B$ admet au moins un antécédent dans $A$), ce qui se traduit par :

$$\forall z \in b \; \exists x \in A \; z = f(x)$$

Dans la pratique, prouver qu'une application est surjective revient à chercher un antécédent pour tout élément de $B$.

On dit que $f$ est bijective ssi $f$ est injective et surjective.

*Exercice.*

Démontrez que $f$ est bijective ssi tout élément de $B$ est l'image d'un élément unique de $A$ :

$$\forall z \in b \; \exists! x \in A \; z = f(x)$$

Si $C$ est inclus dans $A$, on appelle image de $C$ par $f$, notée $f(C)$, l'ensemble des éléments de $B$ qui ont un antécédent dans $C$ :

$$f(C) = \{z \in B / \exists x \in C \; z = f(x)\}$$

Si $D$ est inclus dans $B$, on appelle image réciproque de $D$ par $f$ l'ensemble des antécédents des éléments de $D$ :

$$f^{-1}(D) = \{x \in A / f(x) \in D\}$$

Exercices.

A-t-on :

$f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ ?

$f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$ ?

$f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$

$f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$

Tuyaux : pour démontrer l'égalité de 2 ensembles, le meilleur moyen est de démontrer une "double inclusion", c'est à dire que chaque ensemble est inclus dans l'autre. Aidez vous de diagrammes pour avoir une idée a priori de l'exactitude d'une égalité. Quand une égalité est fausse, donnez un contre exemple et signalez si une des deux inclusions a lieu, trouvez des conditions sur $f$ pour que l'autre inclusion soit vérifiée.

## 1.5 Majorants, minorants, bornes.

### 1.5.1 Définitions.

Soit $E$ une partie de $A$ (par exemple $N$ ou $Z$ ou $R$), un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ (réflexive, transitive et antisymétrique). On dit que $M$ est un majorant de $E$ si et seulement si :

$$\forall x \in E \; x \leq M$$

Par exemple 2 est un majorant de $[0, 1]$.

On dit que $m$ est un minorant de $E$ si et seulement si :

$$\forall x \in E \; x \geq m$$

On dit que $M$ est le plus grand élément de $E$ si et seulement si $M$ est un majorant de $E$ qui appartient à $E$.

Par exemple, 1 est le plus grand élément de $[0, 1]$.

On dit que $m$ est le plus petit élément de $E$ si et seulement si $m$ est un minorant de $E$ qui appartient à $E$.

On dit que $E$ est borné si et seulement si $E$ est majoré et minoré (c'est à dire que $E$ admet au moins un majorant et un minorant). Cette définition est équivalente dans $R$ à :

$$\exists M \; \forall x \in E \; |x| \leq M$$

*Exercices.*

- Si $M$ est un majorant de $E$, tout élément plus grand que $M$ est un aussi un majorant de $E$ (énoncez une propriété analogue pour les minorants).

- Démontrez que s'il existe, le plus grand élément d'un ensemble est unique.

**ATTENTION ! DEFINITIONS DELICATES.**

On dit que $M$ est la borne supérieure de $E$ si et seulement si $M$ est le plus petit majorant de $E$ (c'est à dire que $M$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de $E$).

On dit que $m$ est la borne inférieure de $E$ si et seulement si $m$ est le plus grand minorant de $E$.

**Tuyau fondamental.** Démontrer que $M$ est la borne supérieure d'une partie, revient à démontrer que $M$ est un majorant de la partie, et que tout autre majorant est plus grand que $M$...

*Exercices.*

. Démontrez que si $E$ admet $M$ pour plus grand élément, alors $M$ est aussi la borne supérieure de $E$.

. Démontrez que 2 est la borne supérieure de $[0, 2[$.

. Démontrez que $E = \{\frac{1}{n}/n \in N^*\}$ admet 0 pour borne inférieure.

### 1.5.2 Inégalité triangulaire.

En analyse, on est (très) souvent amené à manipuler des inégalités, et les inégalités triangulaires sont très utiles. Ce sont :

$$\begin{array}{ll} \forall x, y \in R & |x \pm y| \leq |x| + |y| \\ & |x| - |y| \leq |x \pm y| \\ & |y| - |x| \leq |x \pm y| \\ & \big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x \pm y| \end{array}$$

## 1.6 Axiomes de $N$.

Bien que cela puisse paraître "curieux", on est obligé d'admettre pour $N$ un certain nombre de propriétés "intuitivement évidentes" pour définir $N$ l'ensemble des entiers naturels. Ces propriétés sont :

- $N$ existe !
- Toute partie non vide de $N$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide majorée de $N$ admet un plus grand élément.
- $N$ n'a pas de plus grand élément.

Ces 3 propositions sont des axiomes, cela signifie qu'on les considère vraies a priori (un théorème lui se démontre à partir d'axiomes ou d'autres théorèmes).

**Théorème fondamental : raisonnement par récurrence.**

Soit $P(n)$ une proposition (pouvant être vraie ou fausse) dépendant de $n$. On suppose que $P(n_0)$ est vraie et que $\forall n \geq n_0 \;\; P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Alors :

$$\forall n \geq n_0 \;\; P(n) \; est \; vraie$$

*Démonstration.*

Soit $E = \{n \geq n_0, \; P(n) \; fausse\}$. Il s'agit de démontrer que $E$ est vide. Raisonnons par l'absurde, et supposons $E$ non vide.

Alors comme $E$ est non vide il admet un plus petit élément $m$ (axiome 2).

Le fait que $m \in E$ entraîne $m \geq n_0$ et $P(m)$ est fausse. Donc $m \neq n_0$ puisque $P(n_0)$ est vraie. Donc $m > n_0$. Alors $m-1 \geq n_0$ et $m-1 \notin E$ car $m$ est le plus petit élément de $E$. $P(m-1)$ est donc vraie.

Mais $P(m-1) \Longrightarrow P(m)$, donc $P(m)$ est vraie. Donc contradiction et $E$ est vide ce qui est bien le résultat recherché.

## 1.7 Définition "intuitive" de nombre réel (*).

Les mathématiciens ont la manie de vouloir construire l'univers tout entier à partir du "moins de choses" possible. Ces éléments de base de la construction mathématique s'appellent des axiomes. Ainsi, (voir plus haut), il existe des axiomes pour définir $N$ l'ensemble des entiers naturels. A partir de là (et de quelques autres axiomes généraux), il est possible de **démontrer** l'existence de $Z$ (ensemble des entiers relatifs), de $Q$ (ensemble des rationnels), de $R$ (ensemble des réels) et de $C$ (ensemble des complexes).

On ne "touchera" ici à aucune construction précise de $Z$, $Q$ ou $R$. On essaiera simplement de se rendre compte que $R$ est "l'ensemble de toutes les suites décimales illimitées" (en se gardant bien de donner le sens exact d'une suite décimale illimitée !). On fera quelques calculs pour essayer de toucher du doigt ce qu'il y a de plus dans $R$ par rapport à $Q$.

On suppose 2 choses a priori sur les réels :

- tout réel admet une partie entière,

- on peut étendre aux réels les opérations usuels $(+, -, \times, /)$.

On peut tout d'abord remarquer que ces propriétés prolongent celles des rationnels.

On va à présent voir que l'on peut définir (toujours intuitivement et pas très rigoureusement...) les réels comme des suites décimales illimitées. On va construire les éléments du développement décimal d'un réel $x > 0$ de proche en proche (le cas $x < 0$ se déduit aisément). D'après les hypothèses, on peut trouver $n_0 \in N$ défini comme la partie entière de $x$ tel que :

$$n_0 \leq x < n_0 + 1$$

C'est à dire que :

$$n_0 = E(x)$$

Dans ces conditions, la première décimale $n_1$de $x$ devrait s'obtenir comme :

$$n_1 = E(10(x - n_0))$$

C'est à dire qu'en posant $x_1 = 10(x - n_0)$, on a $n_1 = E(x_1)$. On pose donc, pour obtenir la suite $n_1, n_2, ...$ de toutes décimales de $x$ :

$$x_{k+1} = 10(x_k - n_k) \quad et \quad n_{k+1} = E(x_{k+1})$$

Démontrons par récurrence que pour $k \geq 1$ :

$$x_k = 10^k x - \sum_{p=0}^{k-1} n_p 10^{k-p}$$

Pour $k = 1$, il, s'agit bien de la définition de $x_1$. Si cela est vrai pour $k \geq 1$ alors :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 10(x_k - n_k) = 10(10^k x - \sum_{p=0}^{k-1} n_p 10^{k-p} \ - n_k) \\ &= 10^{k+1} x - \sum_{p=0}^{k-1} n_p 10^{k+1-p} \ - 10 n_k \\ &= 10^{k+1} x - \sum_{p=0}^{k} n_p 10^{k+1-p} \end{aligned}$$

Ce qui est bien la formule à l'ordre $k + 1$.

Par définition de $n_k = E(x_k)$ on a :

$$n_k \leq 10^k x - \sum_{p=0}^{k-1} n_p 10^{k-p} < n_k + 1$$

$$n_k/10^k \leq x - \sum_{p=0}^{k-1} n_p 10^{-p} < (n_k + 1)/10^k$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{p=0}^{k} n_p 10^{-p} \leq x < \sum_{p=0}^{k} n_p 10^{-p} \ + \ 1/10^k$$

Ceci prouve que l'on peut encadrer $x$ avec une marge aussi faible que l'on veut $(1/10^k)$ par des développements décimaux finis.

On dit que $x$ est un développement décimal illimité.

Par exemple :

$$\frac{1}{3} = 0,3333333.....$$

En fait, on pourrait dire en supposant connue la notion de limite que 1/3 est la limite de $u_0 = 0,3$ $u_1 = 0,33$ $u_2$....

On suppose à présent que l'on sait aussi faire toutes les opérations $(+,-,\times,/)$ sur les développements décimaux.

Peut-on faire à présent la différence entre les rationnels (pour lesquels on savait déjà faire des développements décimaux) et les réels ? la réponse est oui grâce au théorème suivant.

**Théorème.**

Un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique (c'est à dire que les chiffres après la virgule se reproduisent périodiquement).

*Démonstration.*

Soit $x$ rationnel positif (étendre au cas négatif). Alors on peut écrire $x = p/q$ avec $p$ et $q$ entiers naturels.

Le développement décimal de $x$ s'obtient en faisant la division de $p$ par $q$ (qui donne l'ensemble des chiffres après la virgule de $p/q$...).

Les restes successifs possibles de cette division sont $0, 1, ..., q-1$. Donc, après $q$ étapes au plus, le reste obtenu sera déjà apparu au moins une fois au cours des étapes précédentes. Donc, à partir de ce moment, la suite des opérations redevient la même, et la suite des chiffres dans le quotient réapparaît périodiquement.

Réciproquement, supposons que $x$ admet un développement décimal périodique de longueur $k$ :

$$x = p_0, n_1 n_2 ... n_k n_1 n_2 ... n_k ...$$

où $p_0$ est la partie entière de $x$, et $n_1...n_k$ est la période du développement. Calculons alors $10^k x$. Pour cela, il suffit de "déplacer la virgule vers la droite" de $k$ chiffres :

$$10^k x = p_0 n_1 n_2 ... n_k, n_1 n_2 ... n_k n_1 n_2 ... n_k ...$$

et

$$10^k x - x = p_0 n_1 n_2 ... n_k \;\in\; Z$$

Donc $x$ est rationnel.

On voit donc que parmi les développements décimaux illimités, il y a autre chose que des rationnels : tous les développements non périodiques qui sont des réels irrationnels.

On verra en cours qu'il y a en fait "beaucoup plus" d'irrationnels que de rationnels (démonstration de Kantor, père de la théorie des ensembles...)

**Théorème fondamental** (non démontré).

Toute partie non vide majorée de $R$ admet une borne supérieure. (Toute partie non vide minorée de $R$ admet une borne inférieure).

. On verra une application de ce théorème dans le chapitre sur les limites.

. Cette propriété est fausse dans $Q$ : $\{x \in Q^+ / \ x^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $Q$ (exercice).

## 1.8 Rappels sur les complexes.

### 1.8.1 Notions élémentaires.

Il n'est pas question de revenir ici sur la construction de $C$ (peut-être vue en Terminale). On se bornera à rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales. Par exemple, il faut bien faire attention qu'il n'y a pas de prolongement de $\leq$ dans $C$, et qu'entre autre conséquence il est interdit d'utiliser le symbole $\sqrt{\ }$ (qui signifie "racine carrée **positive**" dans $R$) avec des complexes...

Tout complexe $z$ s'écrit sous la forme :

$$z = a + ib$$

avec $a$ et $b$ réels et $i$ tel que $i^2 = -1$. $a$ s'appelle la partie réelle de $z$ et $b$ partie imaginaire.

Les complexes ont une représentation géométrique dans le plan ou à chaque complexe $z = a + ib$, on peut associer le point de coordonnées $(a, b)$.

Le module de $z$ se définit par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il s'agit de la distance à l'origine pour le point correspondant dans le plan.

Tout complexe peut se mettre sous la forme (dite trigonométrique) :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $\rho$ est le module de $z$, et $\theta$ s'appelle "un argument" de $z$. $(\rho, \theta)$ sont des coordonnées polaires pour le point correspondant.

On peut utiliser la notation “exponentielle” :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

On en déduit les formules :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

qui permettent d'effectuer des linéarisations d'expressions trigonométriques.

Formule de Moivre :

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

### 1.8.2 Recherche des racines carrées d'un complexe.

Soit $z = a + ib$ un complexe, et cherchons s'il existe $x + iy$ tel que $(x + iy)^2 = z$. Ce problème est équivalent à :

$$x^2 - y^2 = a \quad et \quad 2xy = b$$

**SI** $(x, y)$ est solution alors posons $p = x^2$ et $q = -y^2$. Alors $p$ et $q$ sont solutions de :

$$p + q = a \quad et \quad pq = -\frac{b^2}{4}$$

Donc $p$ et $q$ sont solutions de l'équation du second degré à coefficients réels :

$$X^2 - aX - \frac{b^2}{4} = 0$$

dont le discriminant $\Delta = a^2 + b^2$ est toujours positif. Donc on a 2 solutions pour $p$ et $q$ :

$$\begin{array}{lcl} p = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & et & q = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ p = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} & et & q = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{array}$$

la deuxième possibilité ne convient pas car $p$ est positif et $q$ négatif $(p = x^2, q = -y^2)$. On a donc pour $(x, y)$ 4 possibilités données par :

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad et \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Faisons la synthèse des résultats et vérifions si toutes les solutions trouvées conviennent. On a toujours :

$$x^2 - y^2 = a$$

mais :

$$2xy = \pm|b|$$

Donc si $b \geq 0$ on a deux solutions :

$$\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right]$$

et si $b \leq 0$, on a aussi 2 solutions :

$$\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right]$$

Ces formules ne sont évidemment pas à savoir par coeur, c'est la façon d'y arriver qui est importante.

*Remarque.*

En utilisant la notation exponentielle, on trouve 2 racines carrées à un complexe $z = \rho e^{i\theta}$ qui sont $\pm\sqrt{\rho}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

**Corollaire.**

Toute équation du second degré à coefficients complexes admet toujours 2 racines, distinctes ou confondues suivant que le discriminant est nul ou pas.

**Théorème.**

Tout complexe admet $n$ racines n-ièmes distinctes.

Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, les racines n-ièmes de $z$ son données par :

$$\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad 0 \leq k \leq n-1$$

# 2. Limites.

## 2.1 Introduction : limites des suites de réels.

L'étude systématique des suites de réels fera l'objet d'un chapitre ultérieur. On ne donne ici qu'un aperçu de la notion de limite pour les suites.

Une suite de réels est une application $u$ de $N$ dans $R$ notée en général $(u_n)$, l'image de $n$ étant notée $u_n$.

On dit que $l$ est la limite de $(u_n)$ si et seulement si :

"aussi près que l'on veuille de $l$, on peut amener **tous les termes** $u_n$ **à partir d'un certain rang**".

C'est cette tournure "vieux français" qui est le plus proche de la définition rigoureuse de limite :

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in N \; \forall n \geq n_0 \; |u_n - l| \leq \epsilon$$

On note :

$$\lim u_n = l \quad ou \quad u_n \longrightarrow l$$

*Tuyaux.*

- La démonstration d'une telle proposition dans les exercices commence nécessairement par : "Soit $\epsilon > 0$" et consiste à chercher un $n_0$ fonction de $\epsilon$ "qui marche"...

- Il faut bien comprendre que l'on peut associer un $n_0$ tel que etc... à **tout réel strictement positif**, c'est à dire par exemple pour $\epsilon > 0$, mais aussi pour, par exemple, $\epsilon/2$, ou $\epsilon/4$,ou $1/10$ ou $1/5000$. Evidemment, le $n_0$ associé à $\epsilon$ n'est pas le même que pour $\epsilon/2$. Donc, il faut bien faire attention de noter par exemple $n_1$ pour $\epsilon/2$ et $n_2$ pour $\epsilon/4$. Cela peut paraître évident, on en reparlera...

*Exercices.*

Une suite constante égale à $a$ admet $a$ pour limite.

La suite $\dfrac{1}{n}$ admet 0 pour limite.

### 2.1.1 Théorème : unicité de la limite.

Si une suite admet une limite, alors cette limite est unique.

*Démonstration.*

Comme dans la plupart des démonstrations d'unicité, supposons qu'il existe 2 limites $l$ et $q$ pour $(u_n)$, et démontrons que $l = q$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $l \neq q$. Alors $|l - q|/3$ est un réel strictement positif auquel on peut associer $n_1 > 0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1 \ |u_n - l| \leq |l - q|/3$$

car $l$ est limite de $(u_n)$. Mais comme $q$ est aussi limite de $(u_n)$, on peut trouver $n_2$ tel que :

$$\forall n \geq n_2 \ |u_n - q| \leq |l - q|/3$$

Soit $n_0$ le plus grand de $n_1$ et $n_2$. Alors, on peut écrire pour $n \geq n_0$ :

$$|l - q| = |u_n - q + l - u_n| \leq |u_n - q| + |l - u_n| \leq 2|l - q|/3$$

D'ou une contradiction, et l'obtention du résultat recherché.

### 2.1.2 Théorème de la limite monotone.

On dit qu'une suite $(u_n)$ est croissante ssi :

$$\forall n \in N \ u_n \leq u_{n+1}$$

**Théorème.**

Une suite croissante majorée (décroissante minorée) est convergente.

*Démonstration.*

L'ensemble $E = \{u_n, n \in N\}$ est non vide et majoré par hypothèse. Il admet donc une borne supérieure $l$. On va démontrer que $l$ est la limite de $(u_n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Alors $l - \epsilon$ n'est pas un majorant de $E$ (puisque $l$ est le plus petit des majorants de $E$). Cela signifie :

$$\exists n_0 \in N \ l - \epsilon \leq u_{n_0} \leq l$$

La deuxième inégalité étant due au fait que $l$ est un majorant de $E$. Mais comme la suite est croissante on a en fait :

$$\forall n \geq n_0 \ l - \epsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0 \ |u_n - l| \leq \epsilon$$

Comme ce ci a été fait pour tout $\epsilon > 0$, on a bien démontré que $l$ était la limite de $(u_n)$.

## 2.2 Limites des fonctions réelles de variables réelles.

### 2.2.1 Définitions, propriétés élémentaires.

$I$ désigne un intervalle de $R$ non réduit à un point. Sauf mention du contraire $f$ désigne une application de $I - a$ ($I$ privé de $a$) dans $R$. **f n'est donc pas définie en a.**

On dit que $f$ tend vers $l$ en $a$ (ou que $l$ est la limite de $f$ en $a$) si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad ou \quad f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$$

*Remarques et commentaires.*

- $f$ n'est pas obligée d'être définie en $a$, par contre, elle est obligée d'être définie "autour" de $a$, ou "à gauche" de $a$, ou "à droite" de $a$..

- L'ordre des $\forall$ et $\exists$ est fondamental dans la définition : le $\alpha$ dépend du $\epsilon$ (cf limite des suites...).

- En suivant l'ordre des quantificateurs, cette définition signifie "en franais" :

. aussi près de $l$ que l'on veuille pour $f$ (pour tout choix de $\epsilon$),

. en se plaant assez près de $a$ (on peut trouver $\alpha$),

. on peut rendre $f$ proche de $l$ de la manière choisie préalablement.

- La démonstration d'une telle proposition dans les exercices commence par : "Soit $\epsilon > 0$" et consiste à chercher un $\alpha$ fonction de $\epsilon$ "qui marche"...

- A propos des notations, $x \longrightarrow a$ tout seul ne signifie RIEN !

*Exemples.*

- $f(x) = C$ constante sur $R$ admet $C$ pour limite en tout point $a$.

*Démonstration.*

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ pour que :

$$\forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - C| \leq \epsilon$$

Or $|f(x) - C| = 0$, donc par exemple $\alpha = 1$ convient. (Dans ce cas particulier, on a trouvé un $\alpha$ qui ne dépend pas de $\epsilon$).

- $f(x) = x$ admet comme limite $a$ au point $a$.

*Démonstration.*

Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ pour que :

$$\forall x \in I - a \ |x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

Or $|f(x)-a| = |x-a|$, il est clair que si l'on prend $\alpha = \epsilon$, $si\ |x-a| \leq \alpha\ alors\ |f(x)-a| \leq \epsilon$

### 2.2.2 Théorème : unicité de la limite.

Si une fonction admet une limite $l$ en $a$, alors cette limite est unique.

*Démonstration.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle sur les limites. Supposons qu'il existe 2 limites $l$ et $q$ pour $f$ en $a$, et démontrons que $l = q$. On raisonne par l'absurde. Supposons que $l \neq q$. Alors $|l - q/3|$ est un réel strictement positif auquel on peut associer $\alpha_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I - a \ |x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq |l-q|/3$$

car $l$ est limite de $f$ en $a$. Mais comme $q$ est aussi limite de $f$ en $a$, on peut trouver $\alpha_2$ tel que :

$$\forall x \in I - a \ |x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - q| \leq |l-q|/3$$

Soit $\alpha$ le plus petit de $\alpha_1$ et $\alpha_2$. Alors, on peut écrire pour $x \in I - a$ tel que $|x-a| < \alpha$ (et il en existe car $I$ n'est par réduit à un point) :

$$|l-q| = |f(x) - q + l - f(x)| \leq |f(x) - q| + |l - f(x)| \leq 2|l-q|/3$$

D'ou une contradiction.

### 2.2.3 Opérations sur les limites.

**Proposition.**

Si $f$ tend vers $l$ en $a$, alors $f$ est bornée au voisinage de $a$. (au voisinage de $a$ signifie sur un segment autour de $a$.

*Démonstration.*

Appliquons la définition de la limite de $f$ en $a$ avec $\epsilon = 1$. Alors il existe $\alpha$ tel que sur le segment $[a-\alpha, a+\alpha]$ on a $|f(x) - l| \leq 1$, ce qui entraîne par inégalité triangulaire $|f(x)| \leq 1 + |l|$. Ce qui prouve bien que $f$ est bornée sur le segment $[a-\alpha, a+\alpha]$.

Soit $f$ et $g$ définies sur $I - a$ telles que $f \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$ et $g \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} q$. Soit $\lambda$ un réel.

**Théorèmes.**

On a :

$$\lambda f \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \lambda l \qquad f+g \underset{x \to a}{\to} l+q \qquad fg \underset{x \to a}{\to} lq$$

Si $l \neq 0$ on a :

$$\frac{1}{f} \underset{x \to a}{\to} \frac{1}{l}$$

*Démonstrations.*

Si $\lambda = 0$ $\lambda f$ est nulle et tend vers 0 en tout point.

Supposons $\lambda \neq 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $l$ est la limite de $f$ en $a$, soit $\alpha > 0$ associé à $\epsilon/\lambda$ tel que :

$$|x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon/\lambda$$

On a alors :

$$|x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |\lambda f(x) - \lambda l| \leq \epsilon$$

ce qui est le premier résultat.

Comme $l$ est la limite de $f$ en $a$ et $q$ la limite de $g$ en $a$, on peut trouver $\alpha_1$ et $\alpha_2$ (associés à $\epsilon/2$) tels que :

$$|x-a| \leq \alpha_1 \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \epsilon/2$$
$$|x-a| \leq \alpha_2 \Longrightarrow |g(x)-q| \leq \epsilon/2$$

Soit $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Pour $|x-a| \leq \alpha$ on peut écrire :

$$|f(x)+g(x)-l-q| \leq |f(x)-l| + |g(x)-q| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

ce qui prouve bien le résultat annoncé.

La démonstration du théorème sur la limite d'un produit de fonction vous est laissée en exercice. Tuyau : écrire

$$f(x)g(x) - lq = g(x)[f(x)-l] + l[g(x)-q]$$

et utilisez le fait que $g$ est bornée au voisinage de $a$.

La démonstration sur la limite d'un inverse vous est aussi laissée en exercice. Commencez par démontrer qu'il existe un intervalle autour de $a$ ou $f$ ne s'annule pas pour simplement avoir le "droit" de parler de la limite de $\frac{1}{f}$ en $a$.

**Théorème** (dit "des gendarmes").

Si l'on a $g$ et $h$ qui tendent vers $l$ en $a$ et $\forall x \in I - a$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors $f$ tend aussi vers $l$ en $a$.

Démonstration laissée en exercice.

### 2.2.4 Limites infinies et limite en $\pm\infty$.

On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $a$ si et ssi :

$$\forall A > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A$$

On dit que $f$ tend vers $-\infty$ en $a$ ssi $-f$ tend vers $+\infty$ en $a$.

Dans ce paragraphe, on suppose $f$ définie sur un intervalle $[t, +\infty[$.

On dit que $f$ tend vers $l$ en $+\infty$ ssi :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists B > 0 \ \forall x \geq B \ |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ssi :

$$\forall A > 0 \ \exists B \ \forall x \geq B \ f(x) \geq A$$

Ecrire toutes les variantes possibles avec $-\infty$.

Les théorèmes d'opérations sur les limites se généralisent pour des limites "en $\pm\infty$. En ce qui concerne les limites infinies, il faut se rappeler qu'il existe des "formes indéterminées" que l'on écrit par abus de notations : $= +\infty - \infty, \infty \times 0, \dfrac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}$. On verra que les développements limités permettent de lever à coup sûr la quasi totalité de ces indéterminations.

### 2.2.5 Composition des limites.

**Théorème.**

Si $f$ tend vers $b$ en $a$ sans prendre la valeur $b$ au voisinage de $a$, si $g$ tend vers $l$ en $b$, alors $gof$ tend vers $l$ en $a$.

*Démonstration.* (*)

L'hypothèse "$f$ ne prend pas la valeur $b$ au voisinage de $a$" est fondamentale.

Soit $\epsilon > 0$. Alors on peut trouver $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \neq b$ on a :

$$|X - b| \leq \alpha \Longrightarrow |g(X) - l| \leq \epsilon \quad (1)$$

En utilisant le fait que $f$ tend vers $b$ en $a$, pour $\alpha$ on peut trouver $\beta$ tel que pour tout $x \neq a$ on a :

$$|x - a| \leq \beta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \alpha$$

Pour pouvoir utiliser $f(x)$ à la place de $X$ dans (1), il est nécessaire que $f(x) \neq b$, ce qui est bien assuré par les hypothèses. Pour tout $x \neq a$ on a donc :

$$|x - a| \leq \beta \Longrightarrow |g(f(x)) - l| \leq \epsilon$$

ce qui prouve bien le résultat.

# 3. Dérivabilité et continuité.

## 3.1 Définitions.

Désormais $f$ est définie sur un intervalle $I$.

On dit que $f$ est dérivable en $a$ ssi la fonction $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (qui est définie sur $I - a$) admet une limite finie en $a$ notée $f'(a)$.

La quantité $\tau(x)$ s'appelle le taux d'accroissement de $f$ en $a$. Le nombre $f'(a)$, quand il existe, dirige la tangente en $a$ à la courbe représentative de $f$.

La fonction qui à $a$ associe $f'(a)$ s'appelle fonction dérivée de $f$.

**Théorème.**

Toute somme (produit, quotient, composition) de fonctions dérivables est dérivable, et on a les formules suivantes :

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (fog)' = g'.f'og$$

Démonstrations laissées en exercice.

On dit que $f$ est continue en $a$ ssi $f$ tend vers $f(a)$ en $a$.

On peut écrire cela sous la forme :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in I\ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

*Remarques.*

- On n'écrit plus pour la continuité $x \in I - a$ puisque l'inégalité est vérifiée pour $x = a$.

- Une fonction $f$ définie sur $I - a$ est prolongeable par continuité en $a$ ssi $f$ admet une limite $l$ en $a$, auquel cas on pose $f(a) = l$, et l'on obtient un prolongement de $f$ qui est continu en $a$.

## 3.2 Opérations sur les fonctions continues.

**Théorèmes.**

Si $f$ est continue en $a$ alors $f$ est bornée au voisinage de $a$.

Toute somme (produit) de fonctions continues en $a$ est continue en $a$.

L'inverse d'une fonction non nulle et continue en $a$ est continue en $a$.

Si $g$ est continue en $a$ et $f$ continue en $g(a)$ alors $fog$ est continue en $a$.

Si la suite $u_n$ tend vers $a$, et si $f$ est continue en $a$, alors la suite $f(u_n)$ tend vers $f(a)$.

Les trois premières démonstrations sont laissées en exercice. La quatrième est du même genre que celle correspondante sur les limites en plus facile. Faisons la dernière.

Soit $\epsilon > 0$. Alors la continuité de $f$ en $a$ permet d'affirmer l'existence d'$\alpha$ tel que :

$$\forall x \in I \ |x-a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

or comme $u_n$ tend vers $a$ pour le réel $\alpha > 0$ on peut trouver $n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \ |u_n - a| \leq \alpha$$

Donc pour $n \geq n_0$ on a :

$$|f(u_n) - f(a)| \leq \epsilon$$

ce qui prouve bien le résultat annoncé.

### 3.2.1 Lien avec la dérivée.

Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

*Démonstration.*

Soit $f$ dérivable en $a$. Posons :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a)$$

alors $g$ tend vers 0 en $a$ (par la définition de la dérivabilité). Mais on a :

$$f(x) = (g(x) + f'(a))(x-a) + f(a)$$

expression qui prouve que $f$ tend vers $f(a)$ en $a$ (par application des théorèmes d'opérations sur les limites), et donc $f$ est continue en $a$.

**La réciproque de ce théorème est fausse** : par exemple $|\ |$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.

## 3.3 Continuité sur un intervalle.

On dit que $f$ est continue sur un intervalle $I$ ssi $f$ est continue en tout point de $I$.

**Théorème des valeurs intermédiaires.**

L'image continue d'un intervalle est un intervalle. Cela peut aussi s'énoncer sous la forme : si $a$ et $b$ sont deux points de $I$, alors $f$ prend toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$.

La démonstration de ce théorème est un peu technique et ne sera pas donnée ici. Par contre, le théorème en lui même est **fondamental**.

**Théorème.**

L'image continue d'un segment est un segment.

Ce théorème est tout aussi fondamental que le précédent. Sa signification est que sur un segment ou $f$ est continue, $f$ est bornée et atteint ses bornes (et son image est un intervalle, ce qui vient du théorème des valeurs intermédiaires). La démonstration de ce théorème est délicate, et ne sera pas donnée ici.

### 3.3.1 Lien avec la monotonie, fonctions réciproques.

On dit que $f$ est croissante sur l'intervalle $I$ ssi :

$$\forall x, y \in I \ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

On dit que $f$ est strictement croissante sur $I$ ssi :

$$\forall x, y \in I \ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

Ecrire les définitions de décroissance et stricte décroissance.

On dit que $f$ est monotone sur $I$ ssi $f$ est croissante sur $I$ ou bien $f$ est décroissante sur $I$. On dit que $f$ est strictement monotone sur $I$ ssi $f$ est strictement croissante sur $I$ ou bien $f$ est strictement décroissante sur $I$.

**Théorème des fonctions réciproques.**

Si $f$ est continue strictement monotone sur l'intervalle $I$, alors $f$ est une bijection de $I$ sur $f(I)$ (qui est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires), et la bijection réciproque $f^{-1}$ est aussi continue. On dit que $f$ est un homéomorphisme (application bijective bicontinue) de $I$ sur $f(I)$.

Ce théorème, dont la démonstration n'est pas donnée ici, est lui aussi fondamental.

**Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque.**

Soit $f$ un homéomorphisme de l'intervalle $I$ sur l'intervalle $J$ et $x_0$ un point de $I$ en lequel $f$ est dérivable. Alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(x_0)$ ssi $f'(x_0) \neq 0$, et on a alors :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

De plus, si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et que $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est aussi $n$ fois dérivable. Démonstration laissée en exercice (vérifiez cependant que vous avez bien le droit d'utiliser le théorème de composition des limites).

Applications réciproques usuelles.

**Application** arcsin L'application sin est continue et strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. L'application réciproque, notée arcsin, est continue strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. arcsin est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$. Calculons sa dérivée.

$$\arcsin' t = \frac{1}{\cos(\arcsin t)}$$

En tenant compte de :

$$\cos(\arcsin t) \geq 0 \qquad \cos^2(\arcsin t) + \sin^2(\arcsin t) = 1 \qquad \sin \arcsin t = t$$

il vient :

$$\arcsin' t = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

**Application** arccos L'application cos est continue strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. L'application réciproque, notée arccos est continue strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$. arccos est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$. Sa dérivée est donnée par (justification analogue à celle du sin) :

$$\arccos' t = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

*Remarque.*

arccos + arcsin est continue sur $[-1, 1]$ de dérivée nulle sur $]-1, 1[$, elle est donc constante sur $[-1, 1]$. Comme $\arccos 0 = \pi/2$ et $\arcsin 0 = 0$, on en déduit :

$$\forall t \in [-1, 1] \;\; \arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

**Application** arctg L'application tg est continue strictement de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $R$. L'application réciproque notée arctg est continue strictement croissante de $R$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$. arctg est indéfiniment dérivable sur $R$. Calculons sa dérivée.

$$\operatorname{arctg}' t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)} = \frac{1}{1 + t^2}$$

**Formulaire de trigonométrie.** Il est fortement conseillé de vérifier ces formules usuelles en exercices.

$$\begin{array}{lcl} x = \arcsin t & \Longleftrightarrow & (t = \sin x \ et \ x \ \in [-\pi/2, \pi/2]) \\ x = \arccos t & \Longleftrightarrow & (t = \cos x \ et \ x \ \in [0, \pi]) \\ x = \operatorname{arctg} t & \Longleftrightarrow & (t = \operatorname{tg} x \ et \ x \in ]-\pi, \pi[) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sin(\arcsin t) = t & \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2} & \operatorname{tg}(\arcsin t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \ (|t| \neq 1) \\ \cos(\arccos t) = t & \sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2} & \operatorname{tg}(\arcsin t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \ (t \neq 0) \\ \sin(\operatorname{arctg} t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \cos(\operatorname{arctg} t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t) = t \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} t = \sin x & \Longleftrightarrow & \exists k \in Z \ (x = \arcsin t + 2k\pi) \ ou \ (x = \pi - \arcsin t + 2k\pi) \\ t = \cos x & \Longleftrightarrow & \exists k \in Z \ (x = \arccos t + 2k\pi) \ ou \ (x = -\arccos t + 2k\pi) \\ t = \operatorname{tg} x & \Longleftrightarrow & \exists k \in Z \ (x = \operatorname{tg} t + k\pi) \end{array}$$

**Application** argsh . L'applications sh est continue strictement croissante de $R$ sur $R$. L'application réciproque, notée argsh, est continue strictement croissante de $R$ sur $R$. Sa dérivée est :

$$\operatorname{argsh}' t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

On peut vérifier que :

$$\operatorname{argsh} t = \log(t + \sqrt{1+t^2})$$

**Application** argch. L'application ch est continue strictement croissante de $R^+$ sur $[1, +\infty[$. L'application réciproque notée argch est continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $R^+$. Sa dérivée est :

$$\operatorname{argch}' t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \ (t > 1)$$

On peut vérifier que :

$$\operatorname{argch} t = \log(t + \sqrt{t^2-1})$$

**Application** argth . L'application th est continue strictement croissante de $R$ sur $]-1, 1[$. L'application réciproque notée argth est continue strictement de $]-1, 1[$ sur $R$. Sa dérivée est :

$$\operatorname{argth}' t = \frac{1}{1-t^2} \ (-1 < t < 1)$$

On peut vérifier que :

$$\operatorname{argth} t = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

Ecrire par vous même un formulaire similaire à celui donné pour les fonctions trigonométriques classiques.

# 4. Approximation locale des fonctions réelles de variable réelle.

## 4.1 Accroissements finis.

**Théorème de Rolle**.

Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $R$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

*Démonstration.*

- Si $f$ est constante, le résultat est acquis.

- Si $f$ n'est pas constante, on peut (en raisonnant éventuellement sur $-f$) supposer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > f(a)$. Comme $f$ est continue sur le segment $[a, b]$, on sait qu'il existe $c \in [a, b]$ ou $f$ atteint son maximum $M = f(c)$. Mais comme :

$$f(c) = M \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$$

on en déduit que $c \in ]a, b[$, et comme $f$ est dérivable en $c$, $f'(c)$ est la limite du taux d'accroissement à gauche de $c$ qui est positif taux d'accroissement à droite de $c$ qui est négatif. $f'(c)$ est donc nul.

**Théorème des accroissements finis.**

Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $R$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in ]a, b[ \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

L'interprétation géométrique de ce théorème est la suivante : sous les hypothèses données, il existe sur la courbe représentative de $f$ une tangente parallèle à la corde passante par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

La conclusion peut s'écrire sous la forme :

$$\exists \theta \in ]0, 1[ \quad f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$$

Sous cette forme, on peut interpréter le résultat en disant que si l'on prend $f(a)$ à la place de $f(a + h)$, on commet une erreur qui se "comporte comme" $h$ (donc qui diminue comme $h$) à condition que $f'$ soit borné, ce qui est le cas dans la pratique.

*Démonstration.*

Soit :

$$g(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

Alors $g$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $f(b) = f(a) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = 0$. Or :

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé.

**Application fondamentale du théorème des accroissements finis.**

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $I$, dérivable sur $I - a$ et telle que $\lim_a f' = l$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l$.

*Démonstration.*

Les hypothèses permettent d'appliquer le théorème des accroissements finis pour affirmer que pour tout $x \in I - a$, il existe $c_x \in ]a, x[ \cup ]x, a[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f'(x) - l| \leq \epsilon$$

car $l$ est la limite de $f'$ en $a$.

Quand $x$ est tel que $|x - a| \leq \alpha$, alors $|c_x - a| \leq \alpha$ aussi. On peut alors écrire :

$$\forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f'(c_x) - l| \leq \epsilon$$

et donc :

$$\forall x \in I - a \ |x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l| \leq \epsilon$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

## 4.2 Formules de Taylor.

### 4.2.1 Formule de Taylor-Lagrange.

Soit $n$ un entier strictement positif. Soit $f$ une application de classe $C^n$ sur $[a, b]$ ($C^n$ signifie $n$ fois dérivable de dérivée n-ième continue), et admettant une dérivée $n + 1$ sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b - a)^k}{k!} f^k(a) \ + \ \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{n+1}(c)$$

*Démonstration.*

posons :

$$\phi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^k(t) \ - \ \alpha \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où l'on choisit $\alpha$ pour que $\phi(a) = 0$. Un calcul très élémentaire donne :

$$\alpha = [f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a)] / \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or $\phi(b) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$\phi'(c) = 0$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\phi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) + \alpha \frac{(b-t)^n}{n!}$$

On obtient donc :

$$\alpha = f^{n+1}(c)$$

En écrivant $f(a) = 0$, on obtient le résultat annoncé.

*Remarque.*

En posant $b = a + h$, le théorème précédent s'écrit sous la forme : il existe $\theta \in ]0, 1[$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^k(a) \frac{h^k}{k!} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a + \theta h)$$

On arrive donc à exprimer $f(a+h)$ en fonction (pôlynomiale) de $h$ et des dérivées de $f$ en $a$, avec "une erreur" qui se comporte comme $h^{n+1}$.

### 4.2.2 Formule de Taylor avec reste intégral.

On anticipe ici sur la connaissance du calcul intégral. Vérifiez par vous même qu'il n'y a pas de cercle vicieux...

Soit $n \in N$, et soit $f$ une application de classe $C^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a) \ + \ \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) dt$$

*Exercice.*

Démontrez ce théorème (par récurrence et intégration par parties).

## 4.3 Comparaisons des fonctions.

### 4.3.1 Prépondérance.

Soit $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$ privé d'un point $a$ ($a$ peut éventuellement être $\pm\infty$). On dit que $g$ est négligeable devant $f$ en $a \in I$ (ou que $f$ est prépondérante devant $g$), ssi il existe une fonction $w$ telle que $g = wf$ et $w$ tend vers 0 en $a$.

On note : $g = o(f)$ (en précisant en $a$ en cas d'ambiguïté).

*Exemples.*

$g$ est négligeable devant 1 en $a$ ssi $g$ tend vers 0 en $a$.

$t^k = o(t^{k+1})$ en $+\infty$.

$t^{k+1} = o(t^k)$ en 0.

*Propriétés.*

- Si $g = o(f)$ et $f = o(h)$ alors $g = o(h)$.

- Si $g = o(h)$ et $f = o(h)$ alors $g + f = o(h)$

- Si $g = o(f)$ alors $\lambda g = o(f)$ pour tout scalaire $\lambda$.

Démonstrations laissées en exercices.

### 4.3.2 Equivalence.

On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes en $a$ ssi $f - g$ est négligeable devant $g$ ($f$ et $g$ ne sont pas nécessairement définies en $a$). On note $f \sim_a g$.

*Exemples.*

$\sin x \sim_0 x$

Si $f$ a une limite finie $l \neq 0$ en $a$ alors $f \sim_a l$.

**Théorèmes.**

- $f \sim_a g$ ssi il existe une fonction $w$ telle que $f = (1 + w)g$ et $w$ tend vers 0 en $a$.

- S'il existe un intervalle sur lequel $g$ ne s'annule pas, $f \sim_a g$ ssi $f/g$ tend vers 1 en $a$.

Démonstrations en exercice.

**Théorèmes.**

- Si $f \sim_a g$ et $g$ tend vers $l$ en $a$, alors $f$ tend aussi vers $l$ en $a$.

- Si $f \sim_a g$, et $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, alors $1/f \sim_a 1/g$.

- Si $f \sim_a g$, $\forall n \in N$, $f^n \sim_a g^n$.

- Si $f \sim_a g$, et $g$ positive au voisinage de $a$, si $\alpha > 0$, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

Démonstrations en exercice.

**ATTENTION**, on n'a pas le droit d'additionner des équivalents.

*Contre-exemple.*

$f_1(t) = 1 + t$, $f_2(t) = -1$, $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = -1$. On a :

$$f_1 \sim_0 g_1 \quad f_2 \sim_0 g_2$$

mais on n'a pas $f_1 + f_2 \sim_0 g_1 + g_2$.

On a cependant le résultat suivant :

**Théorème.**

Si $g_1 > 0$ et $g_2 > 0$, si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, alors $f_1 + f_2 \sim_0 g_1 + g_2$.

*Démonstration.*

On a $f_1 = g_1(1 + w_1)$ et $f_2 = g_2(1 + w_2)$ avec $\lim_a w_1 = \lim_a w_2 = 0$.

On peut écrire : $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2)(1 + w)$ avec $w = w_1 g_1 + w_2 g_2 / g_1 + g_2$.

Comme $|w_1 g_1 + w_2 g_2| \leq |w_1| g_1 + |w_2| g_2$, et alors

$|w| \leq \max(|w_1|, |w_2|)$, et donc $\lim_a w = 0$.

## 4.4 Développements limités.

### 4.4.1 Définitions propriétés élémentaires.

**Définition.**

Soit $f$ une application d'un intervalle $I$ dans $R$ et $a \in I$. On dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ ssi il existe des réels $a_k$ tels que pour tout $t \in I$ :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t-a)^k + o(t-a)^n$$

ou $o(t-a)^n$ désigne une fonction négligeable devant $(t-a)^n$ en $a$. On peut aussi écrire :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t-a)^k + t^n \epsilon(t-a)$$

ou $\epsilon$ est une fonction qui tend vers 0 en 0.

On peut dire que $f$ s'écrit comme un polynôme de degré $n$ + un "reste" qui est négligeable devant le "dernier" terme du polynôme.

Notamment, les développements en 0 s'écrivent sous la forme :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n + t^n \epsilon(t)$$

avec $\epsilon$ qui tend vers 0 en 0.

**Théorème.**

Si $f$ admet un développement à l'ordre $n$, alors $f$ admet des développements limités à tout ordre $m \leq n$.

Démonstration en exercice.

**Remarque.**

Si $f$ admet un développement, alors $f$ tend vers $a_0$ en $a$. En effet, on peut prendre le développement de $f$ à l'ordre 0 qui affirme :

$$f(t) = a_0 + \epsilon(t - a)$$

avec $\epsilon$ tend vers 0 en 0, ce qui permet de conclure.

On se limitera donc dans la pratique à des applications qui sont continues en $a$, puisqu'on peut poser $f(a) = a_0$ pour rendre $f$ continue en $a$.

**Théorème.**

Si $f$ admet un développement limité alors il est unique.

Démonstration en exercice.

*Remarque.*

L'unicité du développement limité entraîne que si $f$ est paire, alors tous les coefficients $a_{2k+1}$ sont nuls, et si $f$ est impaire alors tous les coefficients $a_{2k}$ sont nuls.

**Théorème d'obtention de développements limités.**

Si $f$ est de classe $C^{n+1}$ sur $[a - \alpha, a + \alpha]$, alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ donné par la formule de Taylor.

La démonstration sera faite en cours, et consiste à démontrer que le "reste" de la formule de Taylor est bien de la forme : $(t - a)^n \epsilon(t - a)$, avec $\epsilon$ tend vers 0 en 0.

Ce théorème permet de construire les développements limités en 0 des fonctions usuelles.

On a :

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \epsilon(x) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \epsilon(x) \\
\operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
\operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \epsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \epsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \epsilon(x) \\
\log(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^n \epsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n \epsilon(x)
\end{aligned}
$$

### 4.4.2 Opérations sur les développements limités.

**Somme.**

Si $f_1$ et $f_2$ admettent des développements limités à l'ordre $n$, alors la somme de ces deux développements limités constitue un développement limité à l'ordre $n$ de la somme $f_1 + f_2$.

Démonstration faite en cours.

**Produit.**

Si $f_1$ et $f_2$ admettent des développements limités à l'ordre $n$, alors le polynôme obtenu en effectuant le produit des 2 développements limités et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à $n$ est le développement limité à l'ordre $n$ du produit $f_1 f_2$.

Démonstration faite en cours.

**Quotient.**

Si $f_1$ et $f_2$ admettent des développements limités à l'ordre $n$, si $f_2(a) \neq 0$, alors le quotient $f_1/f_2$ admet pour développement à l'ordre $n$ le quotient de la division suivant les puissances croissantes des développements de $f_1$ par $f_2$.

Non démontré, voir exemples en cours.

**Lien avec la dérivée.**

Si $f$ est dérivable, et si $f'$ admet un développement à l'ordre $n$ en $a$, alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en $a$ obtenu en "intégrant" le développement limité de $f'$ avec la constante d'intégration $f(a)$.

Non démontré.

**Composition.**

Si $g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$, si $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $g(a)$, alors $fog$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ obtenu en "composant" les développements limités de $f$ et $g$.

Non démontré, voir exercices en cours.

# 5. Intégrale de Riemann

## 5.1 Intégrale d'une application en escaliers.

**Subdivisions d'un segment.**

On appelle subdivision de $[a, b]$, toute famille finie $(a_i)$ telle que :

- $a_0 = a$ et $a_n = b$

- $\forall 1 \leq i \leq n \ a_{i-1} < a_i$, (famille strictement croissante).

On dit qu'une subdivision est plus fine qu'une autre ssi tous les points de la première sont des points de la deuxième.

**Applications en escaliers.**

On dit qu'une application $f$ de $[a, b]$ dans $R$ est en escaliers ssi il existe une subdivision $(a_i)$ de $[a, b]$ telle que $f$ soit constante sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$. On notera $\lambda_i$ la valeur constante de $f$ sur chaque intervalle.

**Théorème-définition.**

Si $f$ est en escaliers, alors le réel :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - a_i)\lambda_i$$

est indépendant de la subdivision "adaptée" à $f$. Démonstration en cours.

**Théorèmes.**

Si $f$ et $g$ sont en escaliers sur $[a, b]$, alors :

- $f + g$ est en escaliers sur $[a, b]$, et $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

- Pour tout réel $\alpha$, $\alpha f$ est en escaliers sur $[a, b]$ et $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

- Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$.

- Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

- Si $|f| \leq M$, alors $|\int_a^b f| \leq (b - a)M$.

- $|f|$ est en escaliers sur $[a, b]$ et $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

- Si $c \in ]a, b[$, alors $f$ est aussi en escaliers sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et on a $\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f$ (relation de Chasles).

Démonstrations en cours.

## 5.2 Intégrabilité.

### 5.2.1 Définitions et théorèmes fondamentaux.

**Théorème-définition.**

Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $R$. Alors les deux propositions (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe deux applications en escaliers $(\phi, \psi)$ telles que :

$$\forall x \in [a, b] \ |f(x) - \phi(x)| \leq \psi(x) \quad et \quad \int_a^b \psi \leq \epsilon$$

(ii) Il existe deux suites d'applications en escaliers $(\phi_n)$ et $(\psi_n)$ telles que :

$$\forall n \in N \ \forall x \in [a, b] \ |f(x) - \phi_n(x)| \leq \psi_n(x) \quad et \quad \lim \int_a^b \psi_n = 0$$

Démonstration faite en cours.

On dit que $f$ est intégrable au sens de Riemann ssi $f$ vérifie l'une des deux propositions précédentes. Tout couple de suite d'applications en escaliers $(\phi_n, \psi_n)$ est dit couple associé à $f$.

**Théorème-définition.**

Si $f$ est intégrable, alors pour tout couple de suites d'applications en escaliers $(\phi_n, \psi_n)$, la suite $(\int_a^b \phi_n)$ est convergente vers une limite qui est indépendante du couple associé, limite que l'on appelle intégrale de $f$. C'est à dire pour tout couple associé $(\phi_n, \psi_n)$ on a :

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b \phi_n$$

Démonstration "esquissée" en cours.

**Théorèmes.**

- Pour les applications en escaliers, les notions d'intégrabilité et d'intégrale précédemment définies coïncident avec les premières définitions.

- Toute application intégrable est bornée.

- Si $f$ et $g$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\alpha f + \beta g$ et $f.g$ sont intégrables sur $[a, b]$, et on a : $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

- Si $f$ est intégrable et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$,

- Si $f$ et $g$ sont intégrables et $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$,

- Si $f$ est intégrable et $|f| \leq M$, alors $|\int_a^b f| \leq (b - a)M$.

- $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

- Si $c \in ]a, b[$ et $f$ intégrable sur $[a, b]$, alors $f$ est aussi intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et on a :

$\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f$ (relation de Chasles).

Quelques unes des démonstrations seront faites en cours.

**Généralisation de l'intégrale à des bornes quelconques.**

Pour $f$ intégrable sur $[a, b]$, on pose :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

On peut vérifier que la relation de Chasles se généralise ici. Mais attention, les théorèmes précédents concernant des inégalités ne sont valables que si les bornes d'intégration sont dans les "sens croissant".

### 5.2.2 Autres caractérisations de l'intégrabilité.

Première caractérisation.

Soit $f$ une application de $[a, b]$ dans $R$ **bornée**. On peut considérer l'ensemble $F^+$ des applications en escaliers qui sont supérieures à $f$ en tout point, et l'ensemble $F^-$ des applications en escaliers qui sont inférieures à $f$ en tout point :

$$\begin{array}{l} F^+ = \{g \rightarrow [a, b] / \forall x \in [a, b] \ f(x) \leq g(x) \ et \ g \ en \ escaliers\} \\ F^- = \{h \rightarrow [a, b] / \forall x \in [a, b] \ h(x) \leq f(x) \ et \ h \ en \ escaliers\} \end{array}$$

Comme $f$ est bornée, il existe $m$ et $M$ tels que :

$$\forall x \in [a, b] \ m \leq f(x) \leq M$$

Donc l'application constante $m$ appartient à $F^-$, et l'application constante $M$ appartient à $F^+$, et donc $F^-$ et $F^+$ sont non vides.

On va considérer à présent les deux ensembles de réels suivants :

$$\begin{array}{l} E^+ = \{\int_a^b g / \ g \in F^+\} \\ E^- = \{\int_a^b h / \ h \in F^-\} \end{array}$$

$E^-$ et $E^+$ sont non vides. De plus, $E^-$ est majoré par $M(b-a)$, et $E^+$ est minoré par $m(b-a)$. Donc $E^+$ admet une borne inférieure notée $I^+(f)$, et $E^-$ admet une borne inférieure notée $I^-(f)$.

**Théorème.**

$f$ (bornée) est intégrable ssi $I^+(f) = I^-(f)$, et dans ce cas on a :

$$\int_a^b f = I^+(f) = I^-(f)$$

Démonstration admise.

Deuxième caractérisation.

Soit $f$ une application de $[a,b]$ dans $R$, et $\sigma = (a_i)$ une subdivision de $[a,b]$, et $\xi_i$ des points vérifiant : $\forall i\ a_{i-1} \leq \xi_i \leq a_i$. On appelle pas de la subdivision le plus grand des réels $(a_i - a_{i-1})$ noté $\delta(\sigma)$. On appelle subdivision pointée (s.p. en abrégé) le couple $(\sigma, \xi)$.

On appelle somme de Riemann associée $f$, $\sigma$ et $\xi$ le réel :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f(\xi_i)$$

**Théorème.**

Si $f$ est intégrable, alors les sommes de Riemann associées à $f$ tendent vers $\int_a^b f$ quand le pas des subdivisions tend vers 0. Cela s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall (\sigma,\xi)\ s.p.\ de\ [a,b],\ si\ \delta(\sigma) \leq \alpha\ alors\ |S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f| \leq \epsilon$$

*Exemples.*

Si $f$ est intégrable, alors les suites :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) \quad et \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

sont des sommes de Riemann associée à $f$, sont convergentes et ont pour limite $\int_a^b f$ (application simple du théorème précédent).

Par exemple, la suite :

$$u_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{i\pi}{2n}$$

tend vers $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ = 1$.

Le problème principal dans les exercices est de reconnaître une suite comme étant une somme de Riemann pour une certaine application $f$.

**Réciproque du théorème précédent.**

Si toutes les sommes de Riemann d'une application $f$ sont convergentes quand leur pas tend vers 0, alors $f$ est intégrable et toutes les sommes de Riemann ont la même limite qui est l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$.

Démonstration admise.

### 5.2.3 Classes d'applications intégrables.

**Théorèmes.**

Soit $f$ définie sur $[a, b]$. Alors :

- si $f$ est monotone sur, alors $f$ est intégrable.

- si $f$ est continue, alors $f$ est intégrable.

- si $f$ est bornée, et intégrable sur tout segment inclus dans $]a, b[$, alors $f$ est intégrable.

Ces théorèmes sont fondamentaux. En particulier le troisième permet d'énoncer le théorème suivant :

- Si $f$ est bornée et n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a, b]$, alors $f$ est intégrable.

Ces théorèmes sont admis.

**Théorème.**

Soit $f$ intégrable sur $[a, b]$, positive et telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Alors $f$ est nulle en tout point ou $f$ est continue.

*Démonstration.*

Soit $x_0$ un point ou $f$ est continue. Supposons que $f(x_0) > 0$. Alors la continuité de $f$ permet de trouver $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \;\; f(x) \geq f(x_0)/2$$

Soit $u$ l'application qui vaut $f(x_0)/2$ sur $I$, et 0 ailleurs. Alors $u$ est intégrable, et on a :

$$0 < \int_a^b u = \alpha f(x_0) \leq \int_a^b f$$

d'ou une contradiction et le résultat.

**Corollaire.**

L'intégrale d'une application positive continue est nulle ssi cette application est nulle.

### 5.2.4 Formule de la moyenne.

Soient $f$ continue et $g$ intégrable sur $[a, b]$, et $g \geq 0$, alors :

$$\exists c \in [a, b] \; tel \; que \; \int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

*Démonstration.*

Comme $f$ est continue, il existe $m$ la borne inférieure et $M$ la borne supérieure de $f$ sur $[a,b]$. On peut donc écrire :

$$\forall x \in [a,b] \ m \leq f(x) \leq M$$

et comme $g$ est positive :

$$\forall x \in [a,b] \ mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et on a donc :

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$$

Si $\displaystyle\int_a^b g = 0$, le résultat est acquis. Sinon, on peut écrire :

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} \leq M$$

mais comme $f$ est continue, elle prend toutes les valeurs entre $m$ et $M$ (théorème des valeurs intermédiaires). On a donc :

$$\exists c \in [a,b] \ tel\ que\ \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g} = f(c)$$

ce qui donne le résultat.

## 5.3 Applications intégrales.

### 5.3.1 Définitions, propriétés fondamentales.

Pour $f$ intégrable sur $[a,b]$, on a appelle application intégrale de $f$ toute application $F$ de la forme :

$$F(t) = \int_c^t f$$

où $c$ est un point de $[a,b]$.

**Théorème de continuité.**

L'application $F$ est continue (**sans autre hypothèse sur** $f$).

*Démonstration.*

Soit $M$ un majorant de $|f|$. On a :

$$|F(t) - F(t_0)| = |\int_{t_0}^{t} f| \leq M|t - t_0|$$

ce qui prouve que $F$ est continue.

**Théorème de dérivabilité.**

Si $f$ est continue en $t_0$, alors $F$ est dérivable en $t_0$ et $F'(t_0) = f(t_0)$.

*Démonstration.*

Pour $t > t_0$, on a :

$$|\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0)| = |\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} f - f(t_0)| = |\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} [f - f(t_0)]|$$

car $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(t_0) = (t - t_0)f(t_0)$. On peut alors écrire :

$$|\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0)| \leq \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} |f - f(t_0)|$$

Mais la continuité de $f$ en $t_0$ permet d'écrire pour $\epsilon > 0$ fixé :

$$\exists \alpha > 0 \; \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \; |f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon$$

on a donc pour $t \in ]t_0, t_0 + \alpha]$ :

$$|\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0)| \leq \epsilon$$

par intégration de l'inégalité précédente. La même inégalité est obtenue pour $t \in [t_0 - \alpha, t_0[$, et on a bien le résultat.

### 5.3.2 Primitives.

Soit $I$ un intervalle et $f$ une application de $I$ dans $R$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $I$ ssi $F$ est dérivable sur $I$ et $F' = f$.

**Théorème.**

Si $f$ admet une primitive $F$ sur $I$, alors elle en admet une infinité qui sont de la forme $F + k$, ou $k$ est une constante sur $I$.

Démonstration (élémentaire) en exercice.

**Primitives des applications continues. Théorème.**

Si $f$ est continue sur $I$, alors pour tout $a$ dans $I$, l'application $F(t) = \displaystyle\int_a^t f$ est une primitive de $f$.

La démonstration n'est qu'une application du théorème de dérivabilité des applications intégrales.

On en déduit donc que toutes les primitives d'une application $f$ continue sur $I$ sont de la forme $\displaystyle\int_a^t f$.

# 6. Calcul des intégrales.

## 6.1 Théorèmes généraux.

**Théorème (fondamental).**

Si $f$ est intégrable sur $[a, b]$, si $F$ est une primitive de $f$, alors :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

La démonstration est triviale dans le cas ou $f$ est continue puisque l'on connaît les primitives des applications continues. Elle est admise dans le cas général (difficile).

**Théorème de changement de variable.**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles, $\phi$ de $I$ dans $J$ de classe C1 (dérivable et de dérivée continue), et $f$ de $J$ dans $R$ de classe C0 (continue); alors :

$$\forall \alpha, \beta \in I \quad \int_\alpha^\beta (f o \phi)\phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f$$

Démonstration admise.

*Exemple.*

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \ dt = \int_0^{-1} u^2 du = -\frac{1}{3}$$

On a posé $u = \sin t$, $du = \cos t dt$ et l'on a changé les bornes d'intégration. Cela "justifie" l'usage de la notation $\int_a^b f(t)dt$ dans laquelle $t$ est une variable **muette**, c'est à dire que le "résultat" ne dépend pas de $t$ et que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(q)dq$.

**Intégration par parties.**

Si $u$ et $v$ sont de classe C1 sur $[a, b]$ (dérivables et de dérivées continues) alors :

$$\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'$$

Il suffit d'employer la formule de dérivation du produit $uv$, et du fait que toutes les applications en présence sont continues et ont donc des primitives.

## 6.2 Calcul pratique des primitives.

*Notation.*

Pour une application $f$ d'un intervalle $I$ dans $R$ on notera :

$$\int f$$

une primitive quelconque de $f$ (quand elle existe). Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit que d'une NOTATION. Ainsi :

$$\int f - \int f = constante$$

et non 0. En ayant une primitive $\int f$ (sur un intervalle, c'est fondamental !), on en déduit toutes les primitives de $f$ sur cette intervalle sont données par $\int f + k$ ou $k$ est une constante.

### 6.2.1 Primitives usuelles.

On donne ici un certain nombre de primitives d'applications usuelles. L'essentiel n'est pas de les savoir "par coeur", mais d'être capable de les retrouver rapidement.

$$\begin{array}{ll}
\int t^\alpha dt = \frac{t^\alpha}{\alpha+1} + k \ (\alpha \neq -1) & \int \cos t dt = \sin t + k \\
\int \sin t dt = -\cos t + k & \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{cotg} t + k \\
\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + k & \int \frac{dt}{\sin t} = \log|\operatorname{tg} \frac{t}{2}| + k \\
\int \operatorname{tg} t \, dt = -\log|\cos t| dt + k & \int \operatorname{cotg} t \, dt = \log|\sin t| + k \\
\int \operatorname{ch} t \, dt = \operatorname{sh} t + k & \int \operatorname{sh} t \, dt = \operatorname{ch} t + k \\
\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + k & \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\coth t + k \\
\int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\operatorname{arctg}(e^t) + k & \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} = \log|\operatorname{th} \frac{t}{2}| + k \\
\int \operatorname{th} t \, dt = \log \operatorname{ch} t + k & \int \coth t \, dt = \log|\operatorname{sh} t| + k \\
\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} & \int a^t dt = \frac{a^t}{\log a} + k \\
\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + k & \int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log|\frac{t-a}{t+a}| + k \\
\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{|a|} + k & \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a}} = \log|t + \sqrt{t^2+a}| + k
\end{array}$$

Certaines de ces primitives sont déjà connues, d'autres s'obtiennent par un changement de variable élémentaire. Les autres s'obtiennent à partir des méthodes qui vont être exposées à présent.

### 6.2.2 Fractions rationnelles.

Définitions.

Une fraction rationnelle s'écrit sous la forme $F(x) = P(x)/Q(x)$ avec $P$ et $Q$ polynômes. On supposera que $P$ et $Q$ n'ont aucun zéro commun, ni réel, ni complexe.

On appelle pôles de la fraction $F$ les zéros du polynôme $Q$, réels ou complexes. On va admettre un certain nombre de résultats sur les polynômes et les fractions rationnelles.

Factorisation canonique des polynômes réels.

$Q$ peut se mettre sous la forme :

$$Q(x) = \lambda(x - a_1)^{i_1}...(x - a_k)^{i_k}.(x^2 + p_1x + q_1)^{j_1}...(x^2 + p_nx + q_n)^{j_n}$$

avec $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ 2 à 2 distincts,

les couples $(p_1, q_1)$, $(p_2, q_2)$, ..., $(p_n, q_n)$ 2 à 2 distincts.

$\forall i\ p_i^2 - 4q_i < 0$.

Eléments simples.

On appelle élément simple de première espèce une fraction rationnelle de la forme :

$$\frac{A}{(x-a)^i},\ i \in N^*$$

On appelle élément simple de seconde espèce une fraction rationnelle de la forme :

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2+px+q)^j}\ j \in N^*$$

avec $p^2 - 4q < 0$.

Théorème de décomposition d'une fraction en éléments simples.

$F = P/Q$ se décompose de manière unique comme somme des éléments suivants :

- la partie entière de $F$ qui est le polynôme quotient de la division euclidienne de $P$ par $Q$,

- des éléments simples de première espèce pour chaque $a_1$ avec des puissances allant de 1 à $i_1$, c'est à dire :

$$\frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{i_1}}{(x-a_1)^{i_1}}$$

- des éléments simples "analogues" pour $a_2$,..., $a_k$,- des éléments simples de seconde espèce pour $(p_1, q_1)$ avec des puissances allant de 1 à $j_1$, c'est à dire :

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{\alpha_{j_1} x+\beta_{j_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{j_1}}$$

- des éléments simples "analogues" pour $(p_2, q_2)$, ..., $(p_n, q_n)$.

Cela peut paraître un peu compliqué, mais un exemple éclaircira la situation. Soit :

$$F(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)^3(x^2+x+1)^2}$$

alors la décomposition de $F$ en éléments simples s'écrit sous la forme (la partie entière est nulle) :

$$F(x)=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x-2)}+\frac{c}{(x-2)^2}+\frac{d}{(x-2)^3}+\frac{ex+f}{x^2+x+1}+\frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}$$

Le calcul des différents coefficients se fait en utilisant le fait que l'écriture précédente est vraie **pour tout x**, et qu'en prenant suffisamment de valeurs de $x$, on aura assez d'équations sur les coefficients pour les calculer (calculs faits en cours). On peut aussi, par exemple, multiplier l'équation précédente par $(x-1)$ et prendre la valeur en 1 qui donnera immédiatement $a$. D'autres "astuces" existent, et seront vues en TD.

Primitives des fractions rationnelles.

D'après le paragraphe précédent, il suffit de pouvoir calculer les primitives des éléments de la décomposition en éléments simples.

La partie entière ne pose pas de problème puisqu'il s'agit d'un polynôme.

Un élément simple de la forme :

$$\frac{A}{(x-a)^i}$$

a pour primitive :

$$\frac{A}{(1-i)(x-a)^{i-1}} \; si\; i>1$$

et :

$$A\log|x-a| \; si \;\; i=1$$

Pour les éléments de seconde espèce :

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^j}$$

on met $x^2 + px + q$ sous forme canonique $(x + p/2)^2 + (q - p^2/4)$, et on écrit $\alpha x = \alpha(x + p/2) - \alpha p/2$.

Les primitives de :

$$\frac{x + p/2}{((x + p/2)^2 + (q - p^2/4))^j}$$

se calculent aisément par le changement de variable :

$$u = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4)$$

Le calcul des primitives de :

$$\frac{1}{((x + p/2)^2 + (q - p^2/4))^j}$$

se ramène par un changement de variable affine à celui des primitives de :

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^j}$$

On effectue le changement de variable :

$$\phi = \operatorname{arctg} x,\ d\phi = \frac{dx}{x^2 + 1},\ \cos^2\phi = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Le calcul se ramène aux primitives de :

$$\cos^{2(j-1)}\phi$$

que l'on va voir au paragraphe suivant. Une autre méthode sera vue en TD.

### 6.2.3 Primitives des polynômes en sin et cos.

On cherche les primitives des fonctions de la forme $\cos^q x \sin^p x$.

Si $p$ (respectivement $q$) est impair, on fait le changement de variable $u = \cos x$ (respectivement $u = \sin t$), et on est ramené à un calcul de primitive de polynôme.

Si $p$ et $q$ sont pairs, on linéarise la fonction (grâce à l'exponentielle complexe par exemple).

### 6.2.4 Primitives des fractions rationnelles en sin et cos.

Méthode générale.

On effectue le changement de variable $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et on utilise les formules :

$$\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

On est ramené à des primitives de fractions rationnelles.

Cas particuliers. "Recettes".

Si "l'élément différentiel", c'est à dire la fonction multipliée par le $dx$, est invariant lorsqu'on change $x$ en $-x$, alors le changement $u = \cos x$ aboutit à une primitive de fraction rationnelle.

Si "l'élément différentiel" est invariant lorsqu'on change $x$ en $\pi - x$, alors le changement $u = \sin x$ aboutit à une primitive de fraction rationnelle.

Si "l'élément différentiel" est invariant lorsqu'on change $x$ en $\pi + x$, alors le changement $u = \operatorname{tg} x$ aboutit à une primitive de fraction rationnelle.

Exemples en cours.

### 6.2.5 Primitives des polynômes et fractions rationnelles en sh et ch.

Les méthodes sont similaires à celles pour sin et cos.

Pour les polynômes en ch et sh, méthode complètement identique.

Pour les fractions, dans le cas général le changement de variable $u = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, et l'on utilise :

$$\operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2} \quad dx = \frac{2du}{1-u^2}$$

Les "recettes" sont aussi valables ici.

### 6.2.6 Primitives des fractions en exponentielles.

Le changement $u = e^x$ conduit à un calcul de primitive de fraction rationnelle puisque $du = udx$.

### 6.2.7 Primitive du produit d'une exponentielle par un polynôme.

On cherche les primitives de $e^{\alpha x}P(x)$ ou $P$ est un polynôme. Une suite d'intégrations par parties, dans laquelle le degré du polynôme "diminue" montre que les primitives sont de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$. On cherche ensuite à identifier les coefficients (exercices en cours).

Ces résultats (on le verra en exercice) permettent (en généralisant au cas complexe) de calculer des primitives des fonctions de la forme $\cos x.P(x)$ ou $\sin x.P(x)$ ou $P$ est un polynôme.