Analyse Numérique Elémentaire

Thierry Nkaoua
Université de Marne La Vallée

Numerical Analysis is very much an Experimental Science.
PeterWynn

Chapitre 1

Introduction

Qu'est ce que l'Analyse Numérique ? C'est l'étude des méthodes numériques ! !

Définition 1 *Méthode Numérique : suite finie d'opérations arithmétiques (+, -, ×, /)permettant d'avoir la solution à un problème avec une précision arbitrairement fixée.*

Les méthodes développées étant destinées à être "vraiment" utilisée, et les calculs étant faits sur ordinateurs, se posent les questions de la précision finie sur un ordinateur, des erreurs d'arrondis, des opérations arithmétiques "inexactes"...
Exemple : à 6 chiffres significatifs, $1 + 10^{-7} = 1$.
Un algorithme ne sera donc jamais"exactement" calculé dans un ordinateur. Il est donc primordial d'étudier l'influence de tous les types "d'erreurs" (arrondis, opérations,etc.) et des "pertubations" de toute nature sur les algorithmes.

Deux notions sont fondamentales en Analyse Numérique :

- la stabilité qui est la capacité d'une méthode à "bien" se comporter en présence "d'imprécisions"
- la précision qui mesure la capacité d'une méthode à approcher la solution "vite et bien".

Naturellement, la loi de Murphy nous suggère que ces deux notions sont contradictoires, et il est facile d'imaginer que des méthodes très "précises" risquent d'être très sensibles à des petites "pertubations" (erreurs d'arrondis par exemple) et ont peu de chances d'être très "stables" (on dit encore robustes).

L'objet de ce cours est d'appréhender ces deux notions de stabilité et de précision, d'abord par l'étude de quelques méthodes simples, puis par l'analyse numérique élémentaire des équations différentielles.

Chapitre 2

Méthodes Elémentaires

2.1 Exemples

2.1.1 Dichotomie

Soit $f : R \rightarrow R$ continue. On cherche à résoudre $f(x) = 0$.

Si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors $\exists\ s$ tel que $f(s) = 0$. C'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Problème numérique : trouver s à ε près aussi petit soit ε.

Algorithme

$$\begin{cases} n = 1 \\ x_n = \dfrac{a+b}{2} \qquad (1) \\ \text{Si } f(x_0) = 0 \text{ stop} \\ \text{si } f(x_0) > 0,\ a \longleftarrow x_0 \\ \text{si } f(x_0) < 0,\ b \longleftarrow x_0 \\ \text{si } |a-b| > \varepsilon,\ n = n+1, \quad \text{retourner en } (1) \end{cases}$$

Après n itérations :

$$|x_n - s| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

Attention : $f(x)$ n'est calculée qu'approximativement par un ordinateur.

2.1.2 Méthode de Newton

On suppose f de classe C^1 On choisit un point de départ x_0. x_{n+1}est donné par l'intersection de la tangente en $(x_n\ ,\ f(x_n))$ avec l'axe des x. Cette tangente a pour équation :

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

et donc :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si la suite a une limite l, alors l vérifie :

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$$

et donc $f(l) = 0$. On verra plus loin quand la convergence a lieu.

2.1.3 Méthode de la corde

Dans la méthode de Newton, on remplace la tangente par la droite passant par $(x_n\ ,\ f(x_n))$ de pente :

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

c'est à dire que l'on approche la dérivée de f par le taux d'accroissement. Cette droite a pour équation :

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

et donc :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Soit encore :

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Si la limite l existe, elle vérifie aussi $f(l) = 0$ (puisque le taux d'accroissement va tendre vers $f'(l)$).

2.2 Ordre de convergence d'une suite

On étudie dans ce paragraphe des notions relatives à la "vitesse" de convergence de suites.

Définition 2 *Soit x_n une suite qui tend vers s sans jamais être égale à s. On appelle l'ordre de convergence de x_n le plus petit réel $r \geq 1$ (s'il existe) tel que :*

$$\lim \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^r} = c \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$$

Par exemple, pour $0 < K < 1$, K^n tend vers 0 avec l'ordre 1,puisque $\dfrac{K^{n+1}}{(K^n)^r} = K^{n(r-1)+1}$. Si $r \neq 1$, $K^{n(r-1)+1}$ tend vers 0 et pour $r = 1$, $K^{n(r-1)+1} = K$.

L'ordre mesure en quelque sorte la "vitesse" à laquelle x_n tend vers sa limite. Plus r est élevé, plus la suite tend vite vers sa limite. Voici quelques éléments précisant ce point.

Soit $d_n = |x_n - s|$ et $e_n = -\log_{10} d_n$. e_n représente le nombre de chiffres "exacts" de x_n (c'est à dire identiques à s). On a :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n^r} \longrightarrow c$$

d'où :

$$d_{n+1} \cong c d_n^r$$

et :

$$e_{n+1} \cong -\log_{10} c + re_n$$

Si $r = 1$ et $c = 1$:
le nombre de chiffres exacts de x_n ne change quasiment pas entre x_n et x_{n+1}.
Si $r = 1$ et $c \neq 1$:
on obtient $-\log_{10} c$ chiffres exacts de plus en passant de x_n à x_{n+1}.
si $r > 1$ on multiplie par r le nombre de chiffres exacts en passant de x_n à x_{n+1}.
La convergence est donc bien plus rapide pour une suite d'ordre > 1 que pour une suite d'ordre 1.
On précise cette notion de rapidité par la définition suivante.

Définition 3 *Si x_n et y_n sont deux suites qui tendent vers s, on dit que x_n converge plus vite que y_n si et seulement si :*

$$\lim \frac{|x_n - s|}{|y_n - s|} = 0$$

Théorème 4 *(admis) Si x_n converge vers s et est d'ordre r_1,si y_n converge vers s et est d'ordre r_2, si $r_1 > r_2$, alors x_n converge plus vite que y_n.*

2.3 Théorèmes de point fixe

Définition 5 *Un point fixe de g est un point x tel que $g(x) = x$. Si x est un point fixe de g, alors x est un zéro de $g(x) + x$.*

Pour commencer, un théorème "élementaire", mais pas très utile dans la pratique :

Théorème 6 *Si $g : [a, b] \to [a, b]$ continue, alors g admet un point fixe.*

Démonstration
$g(a) \geq a$ et $g(b) \leq b$. On pose $h(x) = g(x) - x$. Alors $h(a) \geq 0$ et $h(b) \leq 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\, x$ tel que $h(x) = 0$, c'est à dire $g(x) = x$.

A présent, on va s'intéresser aux suites $x_{n+1} = g(x_n)$. Si x_n converge vers x, alors g continue $\Rightarrow$ ($x_{n+1} = g(x_n) \to g(x)$) d'où $x = g(x)$. Un point fixe de g et donc un zéro de $g(x) + x$ pourra être approché par des telles suites.

Théorème 7 *Point fixe pour une application contractante*
$g : X \to R$ où X est une partie fermée de R,et $\exists\ K \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in X, |g(x) - g(y)| \leq |x - y|$
Alors $\exists!\ x\ /\ g(x) = x$ qui est limite de toutes les suites $x_{n+1} = g(x_n)$

Démonstration
Unicité.
Si x_1 et x_2 sont deux point fixes $|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq K\,|x_1 - x_2|$ $\Rightarrow x_1 = x_2$.
Existence.

Soit x_n une suite $x_{n+1} = g(x_n)$. On va démontrer que x_n est de Cauchy.

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq K\,|x_k - x_{k-1}| \leq \cdots \leq K^k\,|x_1 - x_0|$$

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq (|x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|) \\
|x_{n+p} - x_n| &\leq \left((K^{n+p-1} + K^{n+p-2} + \cdots K^{n+1} + K^n)\,|x_1 - x_0|\right) \\
|x_{n+p} - x_n| &\leq \frac{K^n - K^{n+p}}{1-K}\,|x_1 - x_0| \leq \frac{K^n}{1-K}\,|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq K < 1$, cela prouve que la suite est de Cauchy. Soit x sa limite (qui existe puisque X est fermé donc complet dans R qui est complet). $x_{n+1} = g(x_n)$ tend aussi vers x et $g(x_n)$ tend vers $g(x)$ puisque g contractante entraîne g continue. Donc $g(x) = x$.

On peut remarquer qu'en passant à la limite sur p dans la dernière inégalité, on obtient :

$$|x_n - x| \leq \frac{K^n}{1-K}\,|x_1 - x_0|$$

La convergence de x_n vers x est donc au moins d'ordre 1.

Définition 8 *Un point fixe x d'une application g est dit attirant s'il existe un intervalle $I =]x - \alpha, x + \alpha[$ pour lequel $x_0 \in I \Rightarrow x_n \to x$ (x_n défini par $x_{n+1} = g(x_n)$).*
Il est repoussant si $\exists\ I =]x - \alpha, x + \alpha[\ \forall\ x_0 \in I \Rightarrow \exists\ n$ tel que $x_n \notin I$.

Théorème 9 *Soit $g : R \to R$ C^1 et s un point fixe de g : $g(s) = s$*
si $\left|g^{'}(s)\right| < 1$ alors s est attirant et toutes les suites récurrentes $x_{n+1} = g(x_n)$ convergent pour x_0 suffisament proche de s
si $\left|g^{'}(s)\right| > 1$ alors s est repoussant et aucune suite récurrente ne converge vers s
si $\left|g^{'}(s)\right| = 1$ on ne peut pas conclure.

Démonstration
Si $\left|g^{'}(s)\right| < 1$. g' continue entraîne :

$$\exists L \in [0,1[,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in [s - \alpha, s + \alpha]\,,\ \left|g^{'}(x)\right| \leq L < 1$$

Le théorème des accroissements finis dans $[s - \alpha, s + \alpha]$:

$$\exists \xi \in [s - \alpha, s + \alpha]\,,\ |g(x) - g(s)| = |g(x) - s| = \left|g^{'}(\xi)(x - s)\right| \leq L\,|x - s|$$

Donc g est contractante et donc $x_n \to x$.
Si $\left|g^{'}(s)\right| > 1$:

$$\exists \beta > 0,\ \forall x \in [s - \beta, s + \beta]\ \left|g^{'}(x)\right| \geq \mu > 1$$

donc :

$$\forall x \in [s - \beta, s + \beta]\,,\ |g(x) - g(s)| = |g(x) - s| = \left|g^{'}(\xi)(x - s)\right| \geq \mu\,|x - s|$$

x_n "s'éloigne" de s et x_n ne peut pas converger vers s.

On peut préciser l'ordre de convergence des suites x_n. On suppose donc $|g'(s)| < 1$. On fait un développement limité de $x_{n+1} = g(x_n)$ au voisinage de s :

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(s) + (x_n - s)g'(s) + (x_n - s)\varepsilon(x_n - s)$$

avec $\varepsilon(x - s)$ tend vers 0 quand x tend vers s. On peut donc écrire :

$$x_{n+1} - s = (x_n - s)[g'(s) + \varepsilon(x_n - s)]$$

d'où :

$$\frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|} \longrightarrow |g'(s)|$$

donc si $g'(s) \neq 0$, la convergence est exactement d'ordre 1. Si $g'(s) = 0$,supposons que g est 2 fois dérivables et que $g''(s) \neq 0$. Effectuons un développement à l'ordre 2 :

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(s) + \frac{(x_n - s)^2}{2} g''(s) + (x_n - s)^2 \varepsilon(x_n - s)$$

d'où :

$$\frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^2} \longrightarrow |g''(s)|$$

et la convergence est d'ordre exactement 2, à chaque itération, on multiplie par 2 le nombre de chiffres exacts.

Pour conclure, on peut dire que si $|g'(s)| < 1$, une suite récurrente $x_{n+1} = g(x_n)$ converge, que la convergence est d'ordre 1 si $g'(s) \neq 0$ et qu'elle est d'ordre au moins 2 si $g'(s) = 0$.

2.4 Retour sur les exemples élémentaires.

2.4.1 Dichotomie

A chaque itération, on divise "au pire" l'écart à la solution par 2 et la méthode est d'ordre 1 (ceci ne constitue pas une démonstration "rigoureuse"...).

2.4.2 Corde

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

On peut démontrer que cette méthode est d'ordre $(1 + \sqrt{5})/2$...

2.4.3 Newton

On va essaye de construire une méthode d'ordre au moins 2 pour trouver un zéro de f. Si u est une fonction qui ne s'annule pas :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow u(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + u(x)f(x)$$

$f(x) = 0$ si et seulement x est un point fixe de $g(x) = x + u(x)f(x)$. Soit s le point où $f(s) = 0$, c'est à dire tel que $g(s) = s$. On essaie de choisir u de telle manière que $g'(s) = 0$, comme cela, on aura bien une méthode d'ordre au moins 2.

$$g^{'}(x) = 1 + u^{'}(x)f(x) + u(x)f^{'}(x)$$

Comme $f(s) = 0$, on a :

$$g^{'}(s) = 1 + u(s)f^{'}(s)$$

Si l'on pose :

$$u(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

alors on a bien $g'(s) = 0$. La fonction g dont on cherche le point fixe sera donc :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Pour pouvoir utiliser cett fonction g, il faut donc supposer que f' ne s'annule pas. Les suites récurrentes définies par g sont :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Il s'agit de la méthode de Newton. On a donc le

Théorème 10 *La méthode de Newton est d'ordre au moins* 2.

Chapitre 3

Intégration Numérique

Ce chapitre présente quelques méthodes très élémentaires de calcul numérique de l'intégrale d'une fonction. Soit $f : [a,b] \to R$ intégrable. On cherche à évaluer numériquement $\displaystyle\int_a^b f$. On ne fait ici que présenter ces méthodes, on reviendra sur leur ordre de convergence après avoir étudié l'analyse numérique des équations différentielles.

3.1 Méthode de trapèzes

On utilise une subdivision $(x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b)$ de l'intervalle $[a,b]$. On pose $y_i = f(x_i)$. Sur un intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$, on approche la surface sous "f" par la surface du trapèze $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_i, y_i) :

$$T_i = \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)(y_i + y_{i+1})$$

On approche donc $\int_a^b f$ par :

$$\int_a^b f \sim \sum_{i=0}^{n-1} T_i$$

dont il est clair qu'il s'agit d'une somme de Riemann pour f et qu'elle converge donc vers $\int_a^b f$ quand le pas de la subdivision tend vers 0.

3.2 Méthode des tangentes (ou du point milieu)

On approche l'aire sous f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par l'aire M_i située sous la tangente à la courbe au point milieu $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ où $x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2$ et $y_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}})$.

Théorème 11 $M_i = (x_{i+1} - x_i) y_{i+\frac{1}{2}}$

Démonstration
L'équation de la tangente passant par le point milieu est :

$$y - y_{i+\frac{1}{2}} = f'(x_{i+\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})$$

donc :

$$\begin{aligned}
M_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_{i+\frac{1}{2}} + f'(x_{i+\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}})\right) dx \\
M_i &= (x_{i+1} - x_i)y_{i+\frac{1}{2}} + f'(x_{i+\frac{1}{2}}) \left[\frac{(x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}})^2}{2} - \frac{(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})^2}{2}\right] \\
M_i &= (x_{i+1} - x_i)y_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

On approche donc l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f \sim \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

Ici aussi, il est clair que l'on a une somme de Riemann qui converge vers $\int_a^b f$.

3.3 Méthode de Simpson

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on remplace la courbe par l'arc de parabole qui passe par (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) et $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$. On pose $x_{i+1} - x_i = h$ et on suppose pour l'instant $x_i = 0$. On cherche l'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de la parabole qui passe par $(0, y_1)$, $\left(\frac{h}{2}, y_2\right)$ et (h, y_3). Alors :

$$\begin{array}{l} \gamma = y_1 \\ \alpha\frac{h^2}{4} + \beta\frac{h}{2} + \gamma = y_2 \\ \alpha h^2 + \beta h + \gamma = y_3 \end{array} \iff \begin{array}{l} \gamma = y_1 \\ \alpha h^2 + 2\beta h = 4(y_2 - y_1) \\ \alpha h^2 + \beta h = y_3 - y_1 \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{l} \gamma = y_1 \\ \beta = \dfrac{1}{h}\left[4(y_2 - y_1) - y_3 + y_1\right] \\ \alpha = \dfrac{1}{h^2}\left[y_3 - y_1 - 4y_2 + 3y_1 + y_3\right] \end{array} \iff \begin{array}{l} \gamma = y_1 \\ \beta = \dfrac{1}{h}\left[4y_2 - 3y_1 - y_3\right] \\ \alpha = \dfrac{1}{h^2}\left[2y_3 + 2y_1 - 4y_2\right] \end{array}$$

D'où :

$$\int_0^h f = \alpha\frac{h^3}{3} + \beta\frac{h^2}{2} + \gamma = \frac{h}{6}\left[y_1 + 4y_2 + y_3\right]$$

Pour revenir à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$, le changement de variable $u = x - x_i$ conduit à :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \int_0^h f(u + x_i)du$$

Donc

$$S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6}(y_i + 4y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1})$$

On peut remarquer que :

$$S_i = \frac{T_i + 2M_i}{3}$$

et donc l'approximation de $\int_a^b f$ par :

$$\int_a^b f \sim \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (T_i + 2M_i)$$

tend bien vers $\int_a^b f$.

Théorème 12 *La formule de Simpson :*

$$\int_a^b f = \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)$$

est exacte pour 1, x *et* x^2 *et tous les polynômes de degré 2.*

La démonstration, évidente, est laissée en exercice.

Théorème 13 *La formule de Simpson est aussi vraie pour* x^3 *et pour tous les polynômes de degré 3.*

Démonstration

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(b-a)}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right] \\
&= \frac{(b-a)}{6}\left[a^3 + \frac{1}{2}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b^3\right] \\
&= \frac{(b-a)}{12}(3a^3 + 3a^2b + +3ab^2 + 3b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}
\end{aligned}$$

La généralisation pour les polynômes de degré 3 provient de la linéarité de l'intégrale.

Chapitre 4

Equations Différentielles

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation de la méthode d'Euler

Soit $[0, T]$ un intervalle de R. On se donne une fonction f de $[0, T] \times R^n$ dans R^n et $\eta \in R^n$. On cherche une fonction $y : [0, T] \to R^n$ de classe C^1 solution de l'équation différentielle :

$$\begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(0) = \eta \end{array}$$

C'est à dire :

$$\begin{array}{l} \forall t \in [0, T] \, , \, y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = \eta \end{array}$$

On va essayer de calculer approximativement une valeur de $y(t_1)$ à partir de y_0 pour t_1 assez "proche" de 0. Par intégration de l'équation différentielle sur $[0, t_1]$, on obtient :

$$y(t_1) = y(0) + \int_0^{t_1} f(t, y(t))dt$$

On approche $\int_0^{t_1} f(t, y(t))dt$ par $t_1 f(0, y(0))$,d'où :

$$y(t_1) \simeq y_1 = y(0) + t_1 f(0, y(0)) = \eta + t_1 f(0, \eta)$$

Peut-on à présent approcher $y(t_2)$ à partir des valeurs de y précédentes ? On a :

$$y(t_2) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, y(t))dt$$

En réappliquant le même genre d'approximation, on peut écrire :

$$y(t_2) \simeq y(t_1) + (t_2 - t_1) f(t_1, y(t_1))$$

Mais, $y(t_1)$ est inconnu, donc on va utiliser sa valeur approchée définie précédemment y_1.D'où :

$$y(t_2) \simeq y_2 = y_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, y_1)$$

On se donne une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = T$. On pose $h_n = t_{n+1} - t_n$, on définit (y_n) qu'on espère être une famille de valeurs approchées de $y(t_n)$ par :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ y_0 &= \eta \end{aligned}$$

Cette suite définit ce que l'on dénomme la méthode d'Euler qui est la méthode la plus simple de résolution numérique d'une équation différentielle.
On peut récrire le calcul de y_{n+1} en fonction de y_n sous la forme :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} = f(t_n, y_n)$$

Sous cette forme, on voit que l'on a approché la dérivée y' par un "taux d'accroissement".

Définition 14 *On appelle "erreur" :*

$$e_n = y(t_n) - y_n$$

C'est l'écart entre y_n et la "vraie" valeur de y au temps t_n.

On définit un autre type d'erreur que l'on appelle erreur de consistance ou erreur de méthode. Si les écarts entre les y_n et les $y(t_n)$ ne sont pas trop grands (ce que l'on souhaite), les $y(t_n)$ doivent "presque" vérifier la relation de récurrence définissant les y_n. C'est ce "presque" que l'on appelle l'erreur de consistance. Dans le cas du schéma d'Euler, cette erreur s'écrit :

Définition 15 *Erreur de consistance dans le schéma d'Euler :*

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n))$$

On voit que si la solution exacte vérifiait exactement la relation de récurrence du schéma, cette erreur serait nulle.

4.1.2 Un exemple

Avant d'aller plus loin, il est intéressant d'observer la méthode d'Euler sur un exemple simple :

$$\begin{aligned} y' &= ay \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

On connait la solution : $y(t) = e^{at}$. On prend une subdivision de pas constant h, d'où $t_n = nh$.Le schéma d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + ahy_n = (1 + ah)y_n \\ &y_0 = 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$y_n = (1 + ah)^n$$

L'erreur définie précédemment s'écrit :

$$e_n = e^{anh} - (1 + ah)^n$$

Attention, lorsqu'on cherche la limite de e_n quand h tend vers 0, n dépend de h ! : $nh = t_n$ et t_n ne dépend pas de h. On a :

$$\begin{aligned} e_n &= e^{at_n} - (1+ah)^{\frac{t_n}{h}} \\ (1+ah)^{\frac{t_n}{h}} &= e^{\frac{t_n}{h}\,\mathrm{Log}(1+ah)} \\ Log(1+ah) &= ah - \frac{ah^2}{2} + O(h^3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (1+ah)^{\frac{t_n}{h}} &= e^{at_n - \frac{ah}{2} + O(h^2)} = e^{at_n}(e^{-\frac{ah}{2}+O(h^2)}) \\ &= e^{at_n}(1 - \frac{ah}{2} + O(h^2)) \end{aligned}$$

d'où :

$$e_n = \frac{ah}{2} e^{at_n} + O(h^2)$$

Donc $\lim\limits_{h \to O} e_n = 0$, et cette limite est même uniforme sur $t_n \in [0, T]$. On dit que le schéma est convergent.
Calcul de l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - ahe^{at_n} \\ &= e^{a(t_n+h)} - e^{at_n} - ahe^{at_n} \\ &= e^{at_n}(e^{ah} - 1 - ah) = O(h^2) \end{aligned}$$

4.2 Propriétés et définitions fondamentales

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y) \text{ sur } [0, T] \\ &y(0) = \eta \end{aligned}$$

On rappelle le :

Théorème 16 *de Cauchy-Lipschitz : f continue sur $I \times R^n \to R^n$ et uniformément Lipschitzienne en y . C'est à dire,*

$$\exists K \geq 0, \forall (t, y, z) \in I \times R^n \times R^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq K\|y - z\|$$

Alors l'équation différentielle

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y) \\ &y(0) = \eta \end{aligned}$$

a une solution unique.

On supposera dans toute la suite f continue uniformément Lipschitzienne en y.

On définit une subdivision de $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < ... < T = t_N$, $t_n = h_n$ et $h = \max h_n$.

4.2.1 Schéma à 1 pas

Définition 17 *Un schéma à un pas s'écrit sous la forme :*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ y_0 &= \eta_h \end{aligned}$$

où Φ est une fonction continue. Pour le schéma d'Euler, $\Phi(t_n, y_n, h_n) = f(t_n, y_n)$.

4.2.2 Consistance

Définition 18 *Erreur de consistance sur un pas de temps :*

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)$$

Définition 19 *Consistance : le schéma est consistant si et seulement si :*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n<N} |\varepsilon_n| \to 0$$

Remarque 1 *C'est la somme des erreurs de consistance sur* $[0, T]$.

Définition 20 *On dit que le schéma est d'ordre* p $(p > 0)$ *si et seulement si* $\sum_{n<N} |\varepsilon_n| = O(h^p)$.

Sur l'exemple étudié : $y' = ay$, $T = Nh$, $N = \frac{T}{h}$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{n<N} |\varepsilon_n| &= \sum_{n<N} e^{at_n} |e^{ah} - 1 - ah| \\ &\leq e^{aT} \frac{T}{h} O(h^2) = O(h) \end{aligned}$$

Sur cet exemple, le schéma d'Euler est donc consistant d'ordre 1.

Théorème 21 *Le schéma à 1 pas :*

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

est consistant si et seulement si :

$$\forall t \in [0, T], \forall y \in R,\ \Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

Démonstration

On a :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \Phi(t_n, y(t_n), h_n)$$

par le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que :

$$\varepsilon_n = h_n \left[f(c_n, y(c_n)) - \Phi(t_n, y(t_n), h_n) \right]$$

Soit :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= h_n \left[f(c_n, y(c_n)) - \Phi(c_n, y(c_n), 0) \right] \\ \beta_n &= \Phi(c_n, y(c_n), 0) - \Phi(t_n, y(t_n), h_n) \end{aligned}$$

on a :

$$\varepsilon_n = \alpha_n + h_n \beta_n$$

La somme des $|\alpha_n|$ est une somme de Riemann pour la fonction $|f(t,y(t)) - \Phi(t,y(t),0)|$ et donc :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n<N} |\alpha_n| = \int_0^T |f(t,y(t)) - \Phi(t,y(t),0)| dt$$

On peut d'autre part écrire :

$$|\beta_n| \leq \beta(h) = \max_{\substack{|t-\tau|<h \\ 0<\xi<h}} |\Phi(t,y(t),0) - \Phi(\tau,y(\tau),\xi)|$$

et $\beta(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 par l'uniforme continuité de $(t,h) \mapsto \Phi(t,y(t),h)$ sur $[0,T] \times [0,1]$ (on a fixé par exemple $|h| \leq 1$, puisqu'on cherche une limite quand h tend vers 0). On a donc :

$$|\sum_{n<N} h_n \beta_n| \leq \sum_{n<N} h_n |\beta_n| \leq \sum_{n<N} h_n \beta(h) = T\beta(h)$$

et donc $\sum_{n<N} h_n \beta_n$ tend vers 0 quand h tend 0. On a finalement :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n<N} |\varepsilon_n| = \int_0^T |f(t,y(t)) - \Phi(t,y(t),0)| dt$$

Donc si $f(t,y) = \Phi(t,y,0)$ pour tout $(t,y) \in [0,T] \times R$ alors la méthode est consistante. Réciproquement, si la méthode est consistante, alors pour tout $t \in [0,T]$, $f(t,y(t)) = \Phi(t,y(t),0)$ où $y(t)$ est solution de $y' = f(t,y)$. Comme on peut trouver une telle solution vérifiant en plus une condition initiale du type $y(\tau) = z$, on en déduit $f(\tau,y(\tau)) = \Phi(\tau,y(\tau),0)$, soit $f(t,z) = \Phi(t,z,0)$ pour tout $t \in [0,T]$ et $z \in R$.

♦

4.2.3 Stabilité

Définition 22 *On dit que le schéma est stable sur* $[0,T]$ *si et seulement si* $\exists$ $M > 0$ *vérifiant :*

$$\begin{array}{rcl} & & \forall h \ \forall y_n, z_n, \gamma_n \text{ telles que :} \\ y_{n+1} & = & y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ z_{n+1} & = & z_n + h_n \Phi(t_n, z_n, h_n) + \gamma_n \end{array}$$

alors :

$$\max_{n<N} |z_n - y_n| \leq M \left[|y_0 - z_0| + \sum_{n<N} |\gamma_n| \right]$$

Une "perturbation" sur les données (γ_n et y_0) n'entraine qu'une "perturbation minimale". A cause des erreurs d'arrondis, une propriété de ce genre est indispensable.

Remarque sur la stabilité

Attention : on pourrait définir la stabilité sur $[0, +\infty[$; dans ces conditions, le schéma d'Euler n'est pas stable. Sur notre exemple :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + ahy_n \\ z_{n+1} &= z_n + ahz_n + \gamma_n \\ z_n - y_n &= (1 + ah)(z_n - y_n) + \gamma_n \end{aligned}$$

Pour obtenir la stabilité sur $[0, +\infty[$, il est nécessaire et suffisant d'avoir la condition :

$$|1 + ah| < 1$$

On ne peut obtenir cette inéquation que si $a < 0$, ce qui restreint le type d'équations différentielles pour lesquelles définir ce type de stabilité, et $h < 2/|a|$ ce qui constitue une condition sur le pas de temps. C'est une autre notion de stabilité (dite $A-$*stabilité*) qui n'est définie que pour des équations différentielles "stables", c'est à dire telles que $\lim\limits_{+\infty} y = 0$.

4.2.4 Convergence

Définition 23 *Le schéma est convergent si et seulement si :*

$$\left(\lim_{h\to 0} \eta_h\right) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\left(\max_{n<N} |y(t_n) - y_n)|\right) \to 0$$

Exercice 4.2.1 *Vérifiez que l'exemple étudié pour le schéma d'Euler est convergent.*

Théorème 24 *de Lax. Un schéma consistant et stable est convergent.*

Démonstration

Soit $\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n\Phi(t_n, y(t_n), h_n)$ l'erreur de consistance. Soit $z_n = y(t_n)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h_n\Phi(t_n, y(t_n), h_n) + \varepsilon_n \\ y_{n+1} &= y_n + h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) \end{aligned}$$

Donc d'après la définition de la stabilité : il existe $M > 0$ telle que :

$$\max_{n<N} |y(t_n) - y_n| \le M\left[|y_0 - y(0)| + \sum_{n<N} |\varepsilon_n|\right]$$

c'est à dire :

$$\max_{n<N} |e_n| \le= M\left[|\eta_h - \eta| + \sum_{n<N} |\varepsilon_n|\right]$$

donc si $\lim\limits_{h\to 0} \eta_h = 0$, comme $\lim\limits_{h\to 0} \sum_{n<N} |\varepsilon_n| = 0$ par consistance, on a $\lim\limits_{h\to 0} \max\limits_{n<N} |e_n| = 0$ et le schéma est convergent.

♦

C'est un théorème fondamental.

4.3 Propriétés du Schéma d'Euler

4.3.1 Stabilité

Théorème 25 *Le schéma d'Euler est stable sur* $[0, T]$ *fixé.*

Démonstration
Soit

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ z_{n+1} &= z_n + h_n f(t_n, z_n) + \gamma_n \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - y_{n+1}| &\leq |z_n - y_n| + h_n |f(t_n, z_n) - f(t_n, y_n)| + |\gamma_n| \\ &\leq (1 + K h_n) |z_n - y_n| + |\gamma_n| \\ &\leq e^{K h_n} |z_n - y_n| + |\gamma_n| \end{aligned}$$

Par récurrence, on prouve alors aisément que :

$$|z_n - y_n| \leq e^{KT} \left[|z_0 - y_0| + \sum_{n<N} |\gamma_n| \right]$$

4.3.2 Consistance

Théorème 26 *Le schéma d'Euler est consistant.*

Démonstration
La consistance est une conséquence immédiate du théorème 21.
Mais on peut en refaire une démonstration directe.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme y' est uniformément continue sur $[0, T]$, on a :

$$\exists \alpha > 0, \forall t, \tau \in [0, T], |t - \tau| \leq \alpha \Rightarrow |y'(t) - y'(\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{T}$$

Soit $|h_n| \leq \alpha$. Par le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_n \in]t_n, t_{n+1}[, \; y(t_{n+1}) - y(t_n) = h_n y^{'}(c_n)$$

donc l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n))$$

vérifie :

$$\varepsilon_n = h_n \left[y'(c_n) - y'(t_n) \right]$$

Comme $c_n \in]t_n, t_{n+1}[$ et $|h_n| \leq \alpha$, alors :

$$|\varepsilon_n| \leq h_n \frac{\varepsilon}{T}$$

Donc :

$$\sum_{n<N} |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$$

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h_n \in R, |h_n| \leq \alpha \Rightarrow \sum_{n<N} |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie bien que $\lim\limits_{h \to 0} \sum_{n<N} |\varepsilon_n| = 0$ et la consistance du schéma d'Euler.

♦

Théorème 27 *En supposant f C^1, on peut voir que le schéma d'Euler est d'ordre 1.*

Démonstration

Si f est C^1, alors y est C^2 puisque $y' = f(t,y)$. Par la formule de Taylor, $\exists c_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n)) \\
&= h_n y'(t_n) + \frac{h_n^2}{2} y''(c_n) - h_n y'(t_n) \\
&= \frac{h_n^2}{2} y''(c_n)
\end{aligned}$$

Comme y'' est continue, elle est bornée sur $[0,T]$, et donc $\exists M$ tel que :

$$|\varepsilon_n| \leq M h_n^2$$

donc :

$$\sum_{n<N} |\varepsilon_n| \leq Mh \sum_{n<N} h_n = MTh = O(h)$$

♦

4.3.3 Convergence

Théorème 28 *Le schéma d'Euler est convergent.*

Démonstration

C'est une conséquence du théorème 24 de Lax.

♦

4.3.4 Erreurs d'arrondis dans la méthode d'Euler

f n'est pas nécessairement connue "précisément", soit μ_n "l'erreur" commise dans son évaluation. On suppose que l'on sait borner ces erreurs : $\forall n$, $|\mu_n| \leq \mu$
Soit ρ_n les erreurs d'arrondis de l'ordinateur à chaque étape. On a : $\forall n$, $|\rho_n| \leq \rho$
En fait on calcule :

$$y_{n+1}^* = y_n^* + h_n f(t_n, y_n^*) + h_n \mu_n + \rho_n$$

Ne pas oublier qu'on ne connaît pas μ_n et ρ_n !!
On pose $\beta_n = y(t_n) - y_n^*$ c'est "l'erreur" due au calcul "approché" de l'ordinateur + l'erreur due au schéma" ; plus précisément on a :

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_{n+1}^* \\
&= y(t_{n+1}) - y_n^* - h_n f(t_n, y_n^*) - h_n \mu_n - \rho_n
\end{aligned}$$

Soit :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n))$$

l'erreur de consistance. On a :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= y(t_n) + h_n f(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n - y_n^* - h_n f(t_n, y_n^*) - h_n \mu_n - \rho_n \\ &= \beta_n + h_n \left[f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n^*)\right] + \varepsilon_n - h_n \mu_n - \rho_n\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\beta_{n+1}\right| &\leq (1 + h_n K) \left|\beta_n\right| + \left|\varepsilon_n\right| + h_n \mu + \rho \\ &\leq e^{h_n K} \left|\beta_n\right| + \left|\varepsilon_n\right| + h_n \mu + \rho\end{aligned}$$

D'où l'erreur "finale" (en T) :

$$\begin{aligned}\left|\beta_N\right| &\leq e^{KT} \left[\left|y(0) - y_0^*\right| + \sum_{k<N} \left|\varepsilon_k\right| + T\mu + N\rho\right] \\ \left|\beta_N\right| &\leq e^{KT} \left[\left|y(0) - y_0^*\right| + \sum_{k<N} \left|\varepsilon_k\right| + T\mu + \frac{T}{h}\rho\right]\end{aligned}$$

Il est d'abord important de préciser que cette majoration est "réaliste".

- L'erreur "initiale" $|y(0) - y_0^*|$ ne se "rattrape" jamais (à moins de changer la précision machine!), mais elle "n'explose" pas, et ce quel que soit le nombre de pas de temps.
- L'erreur de "méthode" (ou de consistance, ou de troncature) $\sum_{k<N} |\varepsilon_k|$ tend vers 0 quand h tend vers 0. On améliore les choses avec des pas de temps plus petits.
- L'imprécision dans le calcul de f, $T\mu$ ne se rattrape jamais, mais "n'explose" pas, même quand on diminue le pas de temps et que donc on a de plus en plus d'évaluations de f à effectuer.
- Les erreurs d'arrondis $\frac{T}{h}\rho$ tendent vers l'infini quand on diminue h !! Si l'on veut des résultats plus précis, on diminue le pas de temps, et si la précision machine est insuffisante, l'accumulation des erreurs d'arrondis fait diverger l'algorithme.

4.4 Autres schémas à 1 pas

4.4.1 Schéma d'Euler rétrograde ou implicite

Définition 29 *C'est le schéma défini par :*

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Exemple 30 *Exemple (avec les mêmes notations que pour la méthode d'Euler) :*

$$\begin{aligned}y' &= ay \\ y_0 &= 1\end{aligned}$$

On a donc pour $h \neq 1/a$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + ahy_{n+1} \\ y_n &= \frac{1}{(1-ah)^n} = e^{-\frac{t_n}{h}\operatorname{Log}(1-ah)} \\ &= e^{at_n} + O(h) \end{aligned}$$

Le schéma est donc convergent sur cet exemple.

Exercice 4.4.1 *Calculez l'erreur de consistance dans l'exemple précédent.*

Théorème 31 *Si f est continue et K uniformément lipchitzienne en y, le schéma implicite est consistant.*

La démonstration est analogue au cas du schéma d'Euler.

Théorème 32 *Si f est C^1, le schéma implicite est d'ordre 1.*

La démonstration est analogue au cas du schéma d'Euler.

Théorème 33 *Si f est continue et K uniformément lipchitzienne en y, le schéma implicite est stable.*

Démonstration

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ z_{n+1} &= z_n + h_n f(t_{n+1}, z_{n+1}) + \gamma_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{n+1} - y_{n+1} &= (z_n - y_n) + h_n \left[f(t_{n+1}, z_{n+1}) - h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] + \gamma_n \\ |z_{n+1} - y_{n+1}| &\leq |z_n - y_n| + Kh_n|z_{n+1} - y_{n+1}| + |\gamma_n| \\ (1 - Kh_n)|z_{n+1} - y_{n+1}| &\leq |z_n - y_n| + |\gamma_n| \end{aligned}$$

On prend $|h_n| < \frac{1}{2K}$. On a :

$$\begin{aligned} |z_{n+1} - y_{n+1}| &\leq \frac{1}{1 - Kh_n}\left[|z_n - y_n| + |\gamma_n|\right] \\ &\leq \left(1 + \frac{Kh_n}{1 - Kh_n}\right)\left[|z_n - y_n| + |\gamma_n|\right] \\ &\leq (1 + 2Kh_n)\left[|z_n - y_n| + |\gamma_n|\right] \end{aligned}$$

D'où :

$$|z_n - y_n| \leq e^{2KT}\left[|z_0 - y_0| + \sum_{k<n} |\gamma_k|\right]$$

♦

4.4.2 Schéma Prédicteur Correcteur

On suppose que f est C^2, y est donc C^3.

Définition 34 *C'est le schéma défini par :*

$$\begin{aligned}\bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1}))\end{aligned}$$

Théorème 35 *Le schéma prédicteur-correcteur est consistant d'ordre 2.*

Démonstration
On a :

$$y^{''}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))y^{'}(t)$$

L'erreur de consistance est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n)) - \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}y^{'}(t_n) - \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))\end{aligned}$$

Faisons un développement de $f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))$ en $(t_n, y(t_n))$:

$$\begin{aligned}&f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))) = \\ &f(t_n, y(t_n)) + h\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + hf(t_n, y(t_n))\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + O(h^2) = \\ &y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}y^{'}(t_n) - \frac{h}{2}(y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)) \\ &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy^{'}(t_n) - \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) = O(h^3)\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_{n<N} |\varepsilon_n| \leq NO(h^3) = TO(h^2)$$

♦

Théorème 36 *Le schéma prédicteur-correcteur est stable.*

Démonstration
Soit

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \overline{z}_{n+1})\right] + \gamma_n$$

$$\begin{aligned}|z_{n+1} - y_{n+1}| &\leq (1 + K\frac{h}{2})|z_n - y_n| + \frac{h}{2}|\overline{z}_{n+1} - \overline{y}_{n+1}| + |\gamma_n| \\ &\leq (1 + K\frac{h}{2} + K^2\frac{h^2}{2})|z_n - y_n| + |\gamma_n|\end{aligned}$$

On suppose $|h_n| \leq 1$:

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq (1 + (K + \frac{K^2}{2})h)|z_n - y_n| + |\gamma_n|$$

D'où :

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq e^{(K+\frac{K^2}{2})T}(|z_n - y_n| + \sum_{k<n} |\gamma_k|)$$

♦

Théorème 37 *Le schéma prédicteur correcteur est convergent d'ordre 2.*

4.4.3 Schéma implicite centré

On suppose que f est C^2, y est donc C^3.

Définition 38 *C'est le schéma défini par:*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right]$$

Théorème 39 *Le schéma implicite centré est consistant d'ordre 2.*

Démonstration

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}f(t_n, y(t_n)) - \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \\
&= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}y'(t_n) - \frac{h}{2}f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))
\end{aligned}$$

On fait un développement limité de $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ en $(t_n, y(t_n))$:

$$\begin{aligned}
&f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = \\
&f(t_n, y(t_n)) + h\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + (y(t_{n+1}) - y(t_n))\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) \\
&+O(h^2) + O((y(t_{n+1}) - y(t_n))^2)
\end{aligned}$$

Or :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = hy'(t_n) + O(h^2)$$

donc :

$$\begin{aligned}
&f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = \\
&f(t_n, y(t_n)) + h\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + hy'(t_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + O(h^2) \\
=\ & y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}y'(t_n) - \frac{h}{2}(y'(t_n) + hy''(t_n) + O(h^2)) \\
&= y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n) - \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3) = O(h^3)
\end{aligned}$$

et donc :

$$\sum_{n<N} |\varepsilon_n| \leq NO(h^3) = TO(h^2)$$

♦

Théorème 40 *Le schéma implicite centré est stable*

Démonstration laissée en exercice.

4.4.4 "Initiation" aux schémas de Runge Kutta

Il s'agit de schéma obtenus comme généralisations du schéma Prédicteur Correcteur :

$$\begin{aligned} \overline{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}f(t_{n+1}, \overline{y}_{n+1}) \end{aligned}$$

que l'on reécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} &k_0 = hf(t_n, y_n) \\ &k_1 = hf(t_n + h, y_n + k_0) \\ &y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_1 \end{aligned}$$

Généralisation du schéma prédicteur correcteur
Soit $\alpha > 0$, et soit le schéma :

$$\begin{aligned} &k_0 = hf(t_n, y_n) \\ &k_1 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \alpha k_0) \\ &y_{n+1} = y_n + (1 - \frac{1}{2\alpha})k_0 + \frac{1}{2\alpha}k_1 \end{aligned}$$

- $\alpha = 1$. On retrouve Prédicteur Correcteur aussi appelé schéma de Heun
- $\alpha = \frac{1}{2}$ s'appelle Euler modifié :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$$

Exercice 4.4.2 *Démontrer que ce sont des schémas d'ordre 2 et qu'ils sont stables.*

Schémas d'ordre supérieur
On augmente le nombre de "sous-étapes" pour augmenter l'ordre du schéma.
Schéma de Kutta

$$\begin{aligned} &k_0 = hf(t_n, y_n) \\ &k_1 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\ &k_2 = hf(t_n + h, y_n + 2k_1 - k_0) \\ &y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Théorème 41 *Pour f "assez régulière", le schéma de Kutta est d'ordre 3.*

Exercice 4.4.3 *Démontrez ce théorème.*

Remarque 2 *Si $f(t, y) = f(t)$, on a appliqué la formule de Simpson au calcul de $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f$.*

Deuxième schéma de Heun

$$\begin{aligned}
k_0 &= hf(t_n, y_n) \\
k_1 &= hf(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_0) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_1) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}(k_0 + 3k_2)
\end{aligned}$$

Théorème 42 *Pour f "assez régulière", le deuxième schéma de Heun est d'ordre 3.*

Exercice 4.4.4 *Démontrez ce théorème.*

Schéma de Range Kutta "classique"

$$\begin{aligned}
k_0 &= hf(t_n, y_n) \\
k_1 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\
k_2 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(t_n + h, y_n + k_2) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_2)
\end{aligned}$$

Théorème 43 *Pour f "suffisament" régulière, le schéma de Runge Kutta est d'ordre 4.*

Exercice 4.4.5 *Démontrez ce théorème.*

Remarque 3 *Ce schéma appliqué à $f(t, y) = f(t)$ redonne aussi la formule de Simpson.*