Licence T. Nkaoua

29 Mai 1998

ANALYSE NUMERIQUE ELEMENTAIRE
Examen (3 Heures).

La qualité et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Soit $f : [0,T] \times R \rightarrow R$ de classe C^∞. Soit $a \in R$. On considère l'équation différentielle (E) sur $[0,T]$:

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(0) = a \end{array} \right.$$

On discrétise $[0,T]$ avec un pas constant h: $0 = t_0 < t_1 = h < ... < t_N = Nh = T$. On considère le schéma de résolution de (E) suivant noté (AM) (Adams Moulton) :

$$(AM) \left\{ \begin{array}{l} y_0 = a \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0,y_0) + f(t_1,y_1)\right) \\ y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{12} f(t_{n+1},y_{n+1}) + \frac{2}{3} f(t_n,y_n) - \frac{1}{12} f(t_{n-1},y_{n-1})\right) \text{ pour } n \geq 1 \end{array} \right.$$

1. Le schéma proposé est-il explicite ou implicite ? Est-il à 1 pas ou multi-pas ? Comment s'appelle le schéma qui sert à calculer y_1 ? Quel est l'ordre du schéma au premier pas de temps ?

2. Donnez l'expression de l'erreur de consistance ε_n du schéma sur un pas de temps.

3. En éliminant f de l'expression de ε_n, exprimez ε_n en fonction de y et y' aux points t_{n-1}, t_n et t_{n+1}. Grâce à un développement limité en t_n de cette expression, démontrez que $\varepsilon_n = O(h^4)$. En déduire l'ordre du schéma.

   Soit $x_1 < x_2 < x_3$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. On se pose le problème (I) : “Trouver un polynôme P de degré au plus 2 tel que pour $i = 1,2,3$, $P(x_i) = \alpha_i$” On dira alors que P est le polynôme d'interpolation des (x_i, α_i), on le note $P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{x_1x_2x_3}$.

4. Démontrez l'unicité de la solution du problème (I).

5. Démontrez que les polynômes $P_1 = P^{1,0,0}_{x_1x_2x_3}$, $P_2 = P^{0,1,0}_{x_1x_2x_3}$ et $P_3 = P^{0,0,1}_{x_1x_2x_3}$ existent et explicitez les.

6. Trouvez une solution au problème (I) et exprimez la en fonnction de P_1, P_2 et P_3.

7. Calculez $\int_{t_n}^{t_{n+1}} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{t_{n-1}t_nt_{n+1}}$ en fonction de h, α_1, α_2 et α_3.

   On définit un schéma de résolution de (E) par le procédé suivant. En supposant donnés (t_{n-1}, y_{n-1}) et (t_n, y_n), on définit y_{n+1} par :

   $$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{t_{n-1}t_nt_{n+1}}(t)dt$$

   avec $\alpha_1 = f(t_{n-1}, y_{n-1})$, $\alpha_2 = f(t_n, y_n)$ et $\alpha_3 = f(t_{n+1}, y_{n+1})$.

8. Démontrez que ce schéma est le schéma (AM) après le premier pas de temps.