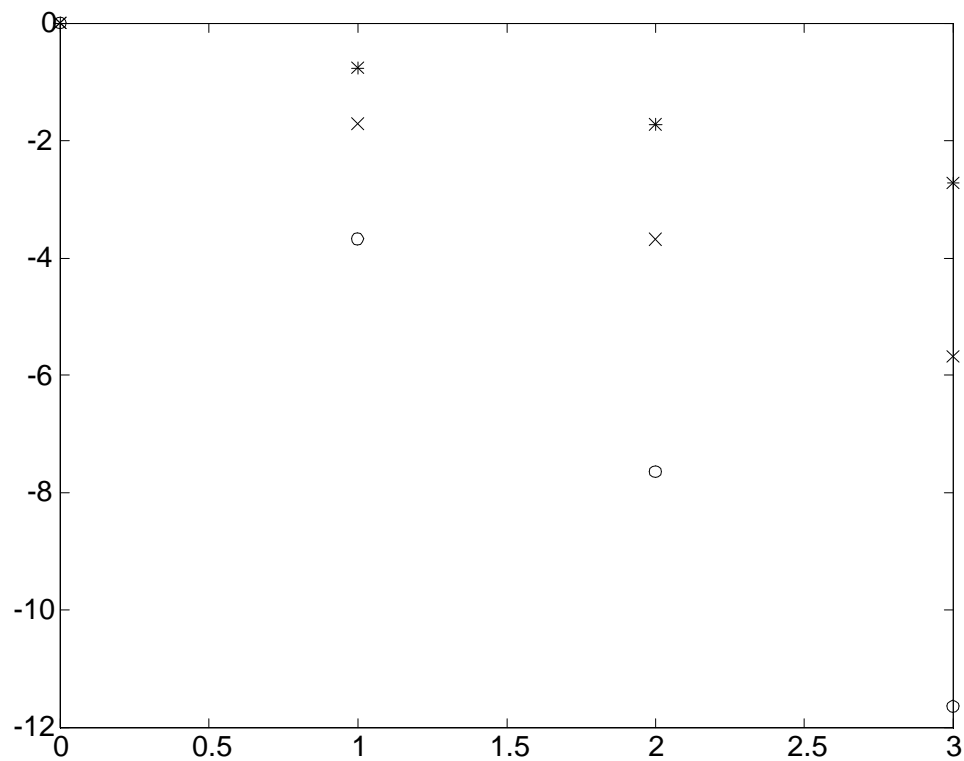


La qualité et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

1. EXERCICE 1 (8 points)

Soit l' équation différentielle $y' = f(t, y)$ pour $t \in [0, T]$, et $y(0) = \eta$.

- (a) Donnez la définition d'un schéma à un pas, de l'erreur de consistance sur un pas de temps, de l'erreur de consistance, de l'erreur sur un pas de temps et de l'erreur. Qu'est ce qu'un schéma consistant? convergent?
- (b) On a représenté dans le graphe ci dessous le \log_{10} de l'erreur en fonction de $-\log_{10}$ de différents pas de temps pour trois schémas notés *, x et o. Expliquez en détails comment on peut retrouver l'ordre des schémas *, x et o à partir de ce graphe.



- (c) Proposez 3 schémas qui pourraient être *, x et o. Ecire explicitement schémas que vous proposez pour * et x.

2. EXERCICE 2 (4 points)

Soit le schéma de Runge Kutta pour résoudre $y' = f(t, y)$:

$$\begin{aligned}
 k_0 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\
 k_1 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}) \\
 k_2 &= hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
 k_3 &= hf(t_n + h, y_n + k_2) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)
 \end{aligned}$$

On considère dans toute la suite l'équation modèle $y' = ay$, $y(0) = 1$. Calculez y_{n+1} en fonction de y_n et démontrez que sur cet exemple le schéma proposé est d'ordre 4 (on donnera le détail des calculs).

3. EXERCICE 3 (3 points)

Pour résoudre l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $f \in C^\infty$, on considère le schéma suivant :

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + b_0 f(t_n, y_n) + b_1 f(t_{n-1}, y_{n-1}) + b_2 f(t_{n-2}, y_{n-2})$$

- (a) Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur les a_i et b_i pour que ce schéma soit d'ordre 1? d'ordre 2?

4. EXERCICE 4 (5 points)

On considère le schéma :

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(t_n, y_n) \\ k_1 &= hf(t_n + ah, y_n + ak_0) \\ y_{n+1} &= y_n + \alpha_0 k_0 + \alpha_1 k_1 \end{aligned}$$

- (a) Déterminez α_0 et α_1 en fonction de a pour que le schéma soit d'ordre le plus élevé possible.
(b) Quel est le schéma obtenu pour $a = 1$? pour $a = 0.5$?