Université de Marne La Vallée. Licence T. Nkaoua

ANALYSE NUMERIQUE ELEMENTAIRE
EXAMEN. 7 JUIN 2000 (3 heures)

Soit f de $[0,T] \times R$ dans R de classe C^∞ et uniformément K-lipchitzienne par rapport à sa deuxième variable et Φ de $[0,T] \times R \times R^+$ dans R de classe C^∞. On considère l'équation différentielle (E) $y' = f(t,y)$ sur $[0,T]$ de condition initiale $y(0) = \alpha$, et le schéma de résolution (R) $y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$, $y_0 = \alpha$, où l'on a effectué une subdivision $t_0 = 0, t_1, ..., t_N = T$ de $[0,T]$ avec $t_{n+1} - t_n = h_n$. On pose $h = \max\limits_{0<n<N-1} h_n$ et on note y la solution de (E).

1. Justifiez l'existence et l'unicité de y. Démontrez que y est de classe C^∞.
2. Donnez les définitions de la consistance et de la stabilité de (R). Démontrez le théorème de Lax.
3. Démontrez que si $\exists \Lambda \in R, \forall t \in [0,T], \forall y_1, y_2 \in R, \forall h \in R^+, |\Phi(t,y_1,h) - \Phi(t,y_2,h)| \leq \Lambda |y_1 - y_2|$, alors (R) est stable.
   Pour $k \in N$, on note $f^{[k]}$ la dérivée $k-ième$ de $t \to f(t,y(t))$ (et $f^{[0]}(t) = f(t,y(t))$).
4. Pour $p \in N$, écrire un développement limité au point t à l'ordre p (reste en $O(u^{p+1})$) de $y(t+u) - y(t)$ en fonction de u et des $f^{[k]}(t,y(t))$. Ecrire un développement limité en $(t,y,0)$ de $\Phi(t,y,u)$ à l'ordre $p-1$. En déduire un développement limité à l'ordre p de l'erreur de consistance ε_n sur $[t_n, t_{n+1}]$ en fonction de h_n, des $f^{[k]}(t_n, y(t_n))$ et des $\dfrac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t_n, y(t_n), 0)$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (R) soit d'ordre au moins p.
   Soit le schéma (K) de résolution de (E) défini par:

$$(K) \begin{cases} k_0 = h_n f(t_n, y_n) \\ k_1 = h_n f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_0) \\ k_2 = h_n f(t_n + h, y_n + 2k_1 - k_0) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \end{cases}$$

6. Démontrez que (K) peut se mettre sous la forme (R) et déterminez la fonction Φ associée notée Φ_K.
7. Calculez $\Phi(t,y,0)$, $\dfrac{\partial \Phi_K}{\partial h}(t,y,0)$ et $\dfrac{\partial^2 \Phi_K}{\partial h^2}(t,y,0)$. Grâce au résultat de la question 5, démontrez que (K) est d'ordre au moins 3.
8. On suppose dans cette question uniquement que $f(t,y) = y$. Calculez $\dfrac{\partial^3 \Phi_K}{\partial h^3}(t,y,0)$. En déduire que (K) n'est pas d'ordre 4.
9. On considère à présent le schéma $(Nyström)$ avec $h_n = h$:

$$(Nyström) \begin{cases} y_0 = \alpha \\ y_1 = y_0 + hf(\frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(0, y_0)) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n) \end{cases}$$

   $(Nyström)$ rentre-t-il dans la catégorie des schémas (R)? Est-ce un schéma explicite?

10. Calculez l'erreur de consistance de ce schéma sur $[t_n, t_{n+1}]$ pour $n \geq 1$ et sur $[0, t_1]$. Démontrez que ce schéma est d'ordre 2.