Licence de Mathématiques T. Nkaoua

1996-97

1. Révisions

   (a) Notations :

$$\begin{aligned} o(h) &= h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0. \\ O(h) &\leq Mh \end{aligned}$$

   (b) Formule de Taylor Lagrange : hypothèses f C^n sur $[a,b]$, f $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors $\exists c \in]a,b[$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^k(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{n+1}(c)$$

   (c) Formule de Taylor Youngs : hypothèses f $n-1$ fois dérivable sur une intervalle ouvert contenant x, n fois dérivable en x, alors :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x)}{k!} h^k + h^k \varepsilon(h)$$

   (d) Formule de Taylor avec reste intégral : f de classe C^n sur $[a,b]$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^n(t)\frac{(t-b)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

   (e) Développements limités usuels

   (f) Equations différentielles linéaires du premier ordre : $y' + a(t)y = f(t)$

      1. Equation homogène : $y' + a(t)y = 0$ solution...
      2. Recherche d'une solution particulière...cas particuliers...
      3. Méthode de "variation de la constante"...

   (g) Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants : $y" + by' + cy = f(t)$

      1. Equation homogène : $y" + by' + cy = 0$, équation caractéristique...
      2. Recherche d'une solution particulière...cas particuliers...
      3. Méthode de "variation des constantes"...

2. Soit g continue et f C^1sur R.

   (a) Calculez la dérivée de $H(t) = e^{-\int_0^t g(s)ds} f(t)$.

   (b) On suppose que f vérifie $f' - gf \leq 0$ sur R^+.

   Démontrez que : $\forall t \in R^+ \quad f(t) \leq f(0)\, e^{\int_0^t g(s)ds}$.

   (c) Soit ϕ continue sur R^+ et h continue et positive sur R^+. On suppose qu'il existe C tel que : $\forall t \in R^+ \ \phi(t) \leq \int_0^t \phi(s)h(s)ds + C$. Démontrez que (Lemme de Gronwall) : $\forall t \in R^+ \ \phi(t) \leq Ce^{\int_0^t h(s)ds}$.

3. Soit ϕ réelle vérifiant : $\exists K > 0, \forall u, v \in R$, $|\phi(u) - \phi(v)| \leq K|u-v|$. Soit f et g deux applications réelles continues. g vérifie : $\exists \varepsilon_1 \geq 0, \forall u \in R, |g(u)| \leq \varepsilon_1$. Soit y et z solutions de :

$$\begin{cases} y' + \phi(y) = f \\ y(0) = a \end{cases} \quad \begin{cases} z' + \phi(z) = f + g \\ y(0) = a + \varepsilon_0 \end{cases}$$

.

(a) Ecrire l'équation différentielle dont est solution $w = z - y$.

(b) Démontrez que sur $[0,T]$, $w = O\left(|\varepsilon_0| + |\varepsilon_1|\right)$.

On suppose désormais que ϕ est de classe C^2. Soit u solution de : $\begin{cases} u' + \phi'(y)u = g \\ u(0) = \varepsilon_0 \end{cases}$

(c) Ecrire l'équation différentielle dont est solution $\theta = w - u$.

(d) Démontrez que sur $[0,T]$, $\theta = O\left(|\varepsilon_0|^2 + |\varepsilon_1|^2\right)$.

4. Soit $(E1)$ l'équation différentielle : $y' - 3y = -3t, t \in [0,5]$.

(a) Résoudre $(E1)$ pour les conditions initiales $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} + \varepsilon$.

(b) Calculez $y(5)$ pour les 2 conditions initiales. On dit que $(E1)$ est "numériquement bien posé" avec la première condition et numériquement mal posé avec la deuxième. Soit $(E2)$ l'équation différentielle : $y' + 150y = 49, t \in [0,1]$.

(c) Résoudre $(E2)$ et démontrez que $(E2)$ est "numériquement bien posé".

5. Soit l'équation différentielle ($k > 0$) :

$$\begin{aligned} y' + ky^2 &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

(a) Résoudre cette équation différentielle. Quelle est la limite de y en $+\infty$?

(b) Ecrire le schéma d'Euler pour cette équation différentielle. On notera h le pas de temps. Soit $\psi(z) = z - khz^2$. Vérifiez que dans le schéma d'Euler on a $y_{n+1=}\psi(y_n)$.

(c) Etudiez de manière détaillée la fonction ψ. Etudiez graphiquement la convergence de la suite y_n. A quelle condition sur h, la suite y_n tend-elle vers 0 ?

(d) On considère à présent le schéma :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + k\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right)^2 = 0$$

où l'on choisit y_{n+1}de manière que $\lim\limits_{h \to 0} y_{n+1} = y_n$. Calculez y_{n+1} en fonction de y_n, k et h.

(e) Soit

$$\phi(z) = \frac{1}{2\alpha}\left(\sqrt{1 + 2\alpha z} - 1\right) - z$$

Vérifiez que la suite précédente vérifie $y_{n+1} = \phi(y_n)$. Etudiez de manière détaillée ϕ et étudiez graphiquement la convergence de la suite y_n. A quelle condition sur h, la suite y_n tend-elle vers 0 ?

(f) On considère les erreurs de consistance sur un pas de temps pour les 2 schémas ($x = nh$, y solution de l'équation différentielle) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(1)} &= y(x+h) - y(x) + khy^2(x) \\ \varepsilon_n^{(2)} &= y(x+h) - y(x) + kh\left(\frac{y(x+h) + y(x)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Effectuez un développement limité de $\varepsilon_n^{(1)}$ et de $\varepsilon_n^{(2)}$. Quel est l'ordre de chacun des schémas ?