Licence de Mathématiques T. Nkaoua

1996-97

On considère pour l'équation différentielle : $y' + ay = 0$, $y(0) = b$ le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_{n+1} = (3+ah)y_n - 2y_{n-1} \\ y_0 = b \\ y_1 = (1-ah)b \end{cases}$$

dans lequel h est le pas de temps. On notera x un point fixé défini par $nx = h$.

1. Expliquez le choix de y_1.
2. Démontrez que l'erreur de consistance sur un pas de temps ε_n vérifie $\varepsilon_n = O(h^2)$. En déduire que le schéma est consistant. Quel est son ordre ?
   y_n étant une suite récurrente d'ordre 2, on sait que, r_1 et r_2 désignant les solutions de $r^2 - (3+ah)r + 2 = 0$, elle vérifie :
   $$y_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$
   On notera r_1 la plus grande des deux racines.
3. Démontrez que :
   $$\begin{cases} r_1 = 2 + 2ah - 2a^2h^2 + O(h^3) \\ r_2 = 1 - ah + 2a^2h^2 + O(h^3) \end{cases}$$
   puis que :
   $$\begin{cases} r_1^n = 2^{\frac{x}{h}} \left(e^{ax} + O(h)\right) \\ r_2^n = e^{-ax} + O(h) \end{cases}$$
4. Calculez α et β en fonction de r_1, r_2, b et y_1. Démontrez que :
   $$\begin{cases} \alpha = h^2 \left(-2a^2b + O(h)\right) \\ \beta = b + O(h) \end{cases}$$
5. En déduire la limite de y_n quand n tend vers l'infini. Que peut-on dire de ce schéma ?
   On essaie d'améliorer le schéma en posant $y_1 = be^{-ah}$.
6. En quoi est ce une tentative d'amélioration. Démontrez que :
   $$\begin{cases} \alpha = h^2 \left(-\frac{3a^2b}{2} + O(h)\right) \\ \beta = b + O(h) \end{cases}$$
7. En déduire la limite de y_n quand n tend vers l'infini. Conclusions ?