Licence T. Nkaoua

24 Avril 1998

ANALYSE NUMERIQUE ELEMENTAIRE
Partiel (2 Heures 30). Documents interdits.

La qualité et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

1. Soit $f : R \to R$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. On pose $a = f'(0)$. Soit la suite définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$.

   (a) (Question de cours) Démontrez que si $|a| < 1$ alors x_n converge vers 0 pour x_0 suffisamment proche de 0. Démontrez que si $|a| < 1$ et $a \neq 0$, la convergence est d'ordre 1. Démontrez que si $a = 0$ et $f''(0) \neq 0$ alors la convergence est d'ordre 2.

   (b) Soit $h : R \to R$ de classe C^1 telle que $h(0) = 0$. Soit $b = h'(0)$ et la suite définie par $y_{n+1} = h(y_n)$. Démontrez que si $|b| < 1$, $b \neq 0$ et $a = 0$ alors pour x_0 et y_0 suffisamment proche de 0, x_n converge vers 0 plus vite que y_n.
   On suppose dans toute la suite que $|a| < 1$ et $a \neq 0$.
   Soit g définie sur R^* par :
   $$g(x) = \frac{xf(f(x)) - f(x)^2}{f(f(x)) - 2f(x) + x}$$

   (c) Démontrez que g est prolongeable par continuité en 0 par 0. Démontrez que g est dérivable en 0 et calculez $g'(0)$.

   (d) Démontrez que les points fixes de g sont les points fixes de f.

   (e) On définit la suite z_n par la donnée de z_0 et les relations :
   $$u = z_n,\ v = f(u),\ w = f(v)$$
   $$z_{n+1} = \frac{uw - v^2}{w - 2v + u}$$
   Démontrez que pour z_0 suffisamment proche de 0, z_n converge vers 0 et converge plus vite que x_n.

2. Soit $b, c \in R$, $f(x) = x^2 + bx + c$. On suppose que f admet 2 racines réelles α et β. On rappelle que $b = -(\alpha+\beta)$ et $c = \alpha\beta$. On considère les suites définies par : $x_{k+1} = -(bx_k + c)/x_k$; $y_{k+1} = -c/(y_k + b)$; $z_{k+1} = -(z_k^2 + c)/b$.

   (a) Démontrez que ces suites ont pour limite éventuelle α ou β.

   (b) Démontrez que si $|\beta| < |\alpha|$, alors α est attractif pour la suite (x_k) et déterminez l'ordre de convergence. Démontrez que si $|\alpha| < |\beta|$, alors α est attractif pour la suite (y_k) et déterminez l'ordre de convergence. Démontrez que si $|2\alpha| < |\alpha+\beta|$, alors α est attractif pour la suite (z_k) et déterminez l'ordre de convergence.
   Soit ϕ est une fonction de classe C^1. On considère la suite : $v_{k+1} = v_k - (v_k^2 + bv_k + c)\phi(v_k)$.

   (c) Démontrez que si $0 < (\alpha - \beta)\phi(\alpha) < 2$, alors α est attractif pour la suite (v_k) et discutez l'ordre de convergence.

   (d) Démontrez que les suites (x_k), (y_k) et (z_k) sont des cas particuliers de la question précédente pour des fonctions ϕ que l'on précisera.

   (e) Si $\phi(x) = 1/(2x + b)$, quelle méthode retrouve-t-on ?