

**ANALYSE NUMERIQUE ELEMENTAIRE**  
**Partiel 26 Avril 2000 (3 Heures).**

Soit  $f$  une application de  $R$  dans  $R$  indéfiniment dérivable. On appellera  $s \in R$  une solution de  $f(x) = 0$ . On rappelle que la méthode de Newton pour déterminer  $s$  peut s'interpréter comme la recherche itérative d'un point fixe de  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ , c'est à dire que l'on construit la suite  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

1. Redonnez les hypothèses usuelles de la méthode Newton et redémontrez que la méthode de Newton est au moins d'ordre 2.

On va étudier la méthode de Newton dans le cas où  $f'(s) = 0$ , on l'appelle alors méthode de Newton\*.

On suppose **dans la suite** que  $f'(s) = 0$  et que  $f''(s) \neq 0$ , et que les itérés de Newton\* ne sont jamais des points où  $f'$  est nulle.

2. Faites un développement limité en  $s$  (avec des restes de la forme  $(x - s)^k \varepsilon(x - s)$ ) de  $f$  à l'ordre 2, de  $f'$  à l'ordre 1 et de  $f''$  à l'ordre 0. En déduire que  $g$  a une limite en  $s$ . On prolonge par continuité  $g$  en  $s$  par cette limite. Quelle est la limite éventuelle de la méthode de Newton\*?

3. Calculez  $g'(x)$  pour  $x \neq s$ . Démontrez que  $g'$  a une limite en  $s$ . En déduire que  $g$  est dérivable en  $s$  (on rappelle le théorème : si  $F$  est continue sur  $]a, b[$ , dérivable sur  $]a, b[ \setminus \{c\}$  et si  $\lim_{x \rightarrow c} F'(x) = z$  alors  $F$  est dérivable en  $c$  et  $F'(c) = z$ ). Démontrez que la méthode de Newton\* converge et déterminez son ordre de convergence. Conclusions?

On admet dans un premier temps le théorème suivant : si  $f(s) = f'(s) = f''(s) = \dots = f^{(m-1)}(s) = 0$  et que  $f^{(m)}(s) \neq 0$  avec  $m \geq 1$ , alors il existe  $h$  de  $R$  dans  $R$  indéfiniment dérivable telle que  $f(x) = (x - s)^m h(x)$  pour tout  $x \in R$  et  $h(s) \neq 0$ .

On suppose à présent **dans la suite** que  $f(s) = f'(s) = f''(s) = \dots = f^{(m-1)}(s) = 0$  et que  $f^{(m)}(s) \neq 0$  avec  $m \geq 1$ .

4. Exprimez  $g$  en fonction de  $h$  et  $h'$  et démontrez que  $g$  a une limite en  $s$ . On prolonge  $g$  par continuité en  $s$  par cette limite. Quelle est la limite éventuelle de la méthode de Newton\*?
5. Calculez  $g'$  en fonction de  $h$ ,  $h'$  et  $h''$ . Démontrez que  $g'$  a une limite en  $s$  et que  $g$  est dérivable en  $s$ .
6. Démontrez que la méthode de Newton\* converge et déterminez l'ordre de convergence. Que peut-on dire de l'ordre de convergence en fonction de  $m$ ? Conclusions?

Soit  $g_m(x) = x - mf(x)/f'(x)$ . On appelle méthode de  $m$ -Newton la recherche itérative d'un point fixe de  $g_m$  ( $x_{n+1} = g_m(x_n)$ ) et on suppose que les itérés de la méthode de  $m$ -Newton ne sont jamais des points où  $f'$  est nulle.

7. Démontrez que  $g_m$  et  $g'_m$  ont une limite en  $s$ . Démontrez que la méthode de  $m$ -Newton converge et déterminez son ordre de convergence. Conclusions?

On appelle méthode de quasi-Newton la recherche itérative d'un point fixe de  $G(x) = x - f(x)/f'(z)$  ( $x_{n+1} = G(x_n)$ ) où  $z$  est fixé tel que  $f'(z) \neq 0$ . On ne fait plus aucune hypothèse sur  $f'(s)$  dans les questions suivantes.

8. Donnez une interprétation géométrique de cette méthode. Précisez la limite éventuelle de la méthode de quasi-Newton et démontrez que si la méthode de quasi-Newton converge alors  $2f'(z)f'(s) - f'(s)^2 \geq 0$ .
9. Démontrez que si l'inégalité précédente est stricte alors la méthode de quasi-Newton converge. Quel est alors l'ordre de convergence? Peut-on avoir un ordre de convergence supérieur ou égal à 2?

10. Questions subsidiaires : Démontrez le théorème rappelé en 4. Démontrez le théorème admis en 5 (partir d'un développement limité de  $f(x)/(x - s)^m$ ).