LICENCE. ANALYSE NUMERIQUE ELEMENTAIRE. Thierry Nkaoua

PARTIEL (2 heures). Documents Interdits. 4 Avril 2001

La qualité et la précision de la rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Soit f de R dans R de classe C^∞ dont la dérivée et la dérivée seconde ne s'annulent pas au voisinage de a vérifiant $f(a) = 0$. On considère les suites x_n et y_n définies par la donnée de x_0 et les relations :

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

On suppose que ces suites convergent vers a et que $\forall n \in N$, $x_n \neq a$ et $y_n \neq a$.

1. Donnez une interprétation géométrique de ces suites.
2. Effectuez un développement limité à l'ordre 2 (reste en $O(a - x_n)^2$) de $f(a)$ en x_n.
3. Démontrez que :
$$\lim \frac{y_n - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(a)}{2f'(a)}$$
4. Effectuez un développement limité à l'ordre 2 de $f(y_n)$ en a.
5. Démontrez que :
$$\lim \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)(y_n - a)} = \frac{f''(a)}{f'(a)}$$
6. Démontrez que la suite x_n est d'ordre au moins 3.
7. Démontrez que la suite y_n est d'ordre au moins 3.
8. Soit z_n la suite définie par z_0 et z_n obtenu par $2n$ itérations de la méthode de Newton. Démontrez que z_n est d'ordre 4.
9. Quels sont les avantages et inconvénients de x_n par rapport à la méthode de Newton? par rapport à z_n? Dans la pratique, qu'utiliseriez vous et pourquoi?
10. Question subsidiaire : si u_n est une suite d'ordre r de limite s, et $v_n = u_{kn}$, où $k \in N^*$, quel est l'ordre de v_n? Faites une démonstration "intuitive" et "simple", puis une démonstration plus "rigoureuse" et peut-être un peu moins "élégante".