

Projet d'Analyse Numérique

Partie I : méthodes de résolution d'équations différentielles

Pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ (y est à valeurs réelles), choisissez une méthode de résolution d'ordre 1 et une d'ordre 2, implantez les, étudiez les, analysez les et comparez les sur des exemples de votre choix.

Partie II : calcul de rayons et de fronts

On considère la propagation d'un signal dans un milieu à deux dimensions. Le signal part d'un point et se propage simultanément dans toutes les directions mais à une vitesse notée $c(x, y)$ qui dépend du point (x, y) du milieu, c'est à dire que si le signal se trouve en (x, y) , alors le module de sa vitesse est égal à $c(x, y)$ quelle que soit la direction de propagation. On va décomposer cette propagation en rayons monodimensionnels. On suppose que le point de départ du signal est $O(0, 0)$, et l'on appelle rayon dans la direction θ la trajectoire $(x(s), y(s))$ du signal paramétrée par s son abscisse curviligne. On peut démontrer que chaque rayon $(x(s), y(s))$ émis de $(0, 0)$ dans une direction θ est solution du système d'équations différentielles :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(s) = c(x(s), y(s))v(s) \\ y'(s) = c(x(s), y(s))w(s) \\ v'(s) = a'_x(x(s), y(s)) \\ w'(s) = a'_y(x(s), y(s)) \\ x(0) = y(0) = 0 \\ v(0) = a(0, 0) \cos \theta, \quad w(0) = a(0, 0) \sin \theta \end{cases}$$

où $a(x, y) = 1/c(x, y)$ et a'_x et a'_y dénotent les dérivées partielles par rapport à x et y .

1. Démontrez que le temps de propagation $T(s)$ jusqu'au point d'abscisse curviligne s est solution de l'équation différentielle $(ST) : T'(s) = a$
2. Démontrez que l'expression $v^2(s) + w^2(s) - a^2(x(s), y(s))$ est constante le long d'un rayon.

On résout numériquement le système d'équations (S) (et (ST) si l'on en a besoin) par la méthode d'Euler explicite sur $[0, sm]$, on appelle ds le pas de discrétisation de s . On suppose donnés les programmes Matlab *lent.m*, *lentx.m* et *lenty.m* (arguments d'entrée (x, y) , arguments de sortie respectivement $a(x, y)$, $a'_x(x, y)$, $a'_y(x, y)$) (on suppose connues les "caractéristiques" du milieu).

3. Ecrire la méthode d'Euler pour (S) et pour (ST) .
4. Ecrire un programme *rayon.m* ayant en arguments d'entrée $(teta, ds, sm)$ et en arguments de sortie (x, y, v, w) aux différents ds de 0 à sm obtenus par la méthode d'Euler, et qui affiche le rayon $(x(s), y(s))$. Testez ce programme avec $lent(x, y) = 1$. Testez la validité de la condition (1) sur les variables discrétisées pour différents pas ds . Commentaires.
5. A présent, on effectue une subdivision régulière de $[0, 2\pi]$ $\theta_0 = 0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n = 2\pi$. Ecrire un programme *traj.m* ayant en arguments d'entrée (ds, n, sm) et traçant sur le même graphe les différents rayons pour chaque direction θ_i .
6. On se donne un temps T , et l'on voudrait savoir où sont arrivés les rayons issus de $(0, 0)$ avec les directions θ_i au temps T . On appelle l'ensemble de ces positions le front du signal à l'instant T . Ecrire un programme *front.m* ayant en arguments d'entrée (ds, n, T) et en arguments de sortie $(x(i), y(i))$ où pour i fixé $(x(i), y(i))$ sont les coordonnées au temps T du rayon issu de $(0, 0)$ avec θ_i comme direction. Généralisez ce programme au cas où T est un vecteur d'instants successifs, les arguments de sortie deviennent $(x(k, i), y(k, i))$ où k varie de 1 au nombre d'instants donnés. Programmez de manière à ne pas recalculer la solution depuis 0 pour chaque instant. Rajoutez au programme l'affichage sur le même graphe des différents fronts. Testez ce programme avec $lent(x, y) = 1$, puis avec $lent(x, y) = y^2(x^2 + y^2) + 1$ puis avec des exemples que vous jugerez significatifs.
7. Donnez des utilisations potentielles de ce genre de calculs.