Licence de Mathématiques. Analyse Numérique Elémentaire T. Nkaoua

Examen. 2h30 Session de Septembre 1999

1. Etudiez les fonctions de R dans R ψ et ϕ définies par :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x - ax^2 \\ \phi(x) &= \frac{1}{2b}\left(\sqrt{1+2bx}-1\right) - x\end{aligned}$$

   et les suites récurrentes définies par $x_{n+1} = \psi(x_n)$ et $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

2. Soit l'équation différentielle (E) pour $t \in [0, +\infty[$ $(k > 0)$:

$$\begin{aligned}y' + ky^2 &= 0 \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

   Résoudre cette équation différentielle. Quelle est la limite de y en $+\infty$?

3. Ecrire le schéma d'Euler pour cette équation différentielle. On notera h le pas de temps supposé constant et y_n les valeurs approchéres de $y(nh)$ par la méthode d'Euler. A quelle condition sur h, la suite y_n tend-elle vers 0 ?

4. On considère à présent le schéma de résolution de (E) :

$$\begin{aligned}&w_{n+1} = w_n - kh\left(\frac{w_{n+1}+w_n}{2}\right)^2 \\ &w_0 = 1\end{aligned}$$

   Peut-on choisir w_{n+1} de manière à ce que $\lim\limits_{h\to 0} w_{n+1} = w_n$. Expliquez ce choix que l'on fait pour la suite. Calculez w_{n+1} en fonction de w_n, k et h. A quelle condition sur h, la suite w_n tend-elle vers 0 ?

5. Déterminer l'ordre du schéma w_n.

6. Pour une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ où f est de classe C^∞, on considère le schéma :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

   Quelles sont les caractéristiques de ce schéma, avantages ou inconvénients "a priori" par rapport à d'autres schémas?

7. Déterminez l'ordre de ce schéma.