Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles

Thierry Nkaoua
Université de Marne La Vallée

Chapitre 1

Introduction

Problème modèle : $\Omega \subset R$ ouvert, $\partial\Omega = \Gamma$, déflexion d'une membrane, $u(x)$, sur Γ, $u = 0$. Problème (P) :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans}\, \Omega \\ u &= 0 \text{ sur}\, \Gamma \end{aligned}$$

avec $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. On va chercher $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Autre formulation, énergie :

$$J(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left((\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2 \right) - fv \right] dx$$

avec v tel que $v_{|\Gamma} = 0$. On peut aussi écrire :

$$J(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \mid\mid \nabla v \mid\mid_2^2 - fv \right] dx$$

La formulation "énergie" du problème physique est de trouver u tel que $J(u) = \underset{v \in v}{Min}$ $J(v)$, (où V est à préciser). La physique nous dit que ce problème est équivalent à (P).

Dans un cadre "théorique" à préciser, calculons ∇J. Soit v et h tels que $v_{|\Gamma} = 0$ et $h_{|\Gamma} = 0$.

$$\begin{aligned} J(v+h) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \left(\nabla(v+h).\nabla(v+h) \right) - f(v+h) \right] dx \\ &= J(v) + \int_\Omega \left[\nabla v \nabla h - fh \right] dx + \int_\Omega \left[\nabla h . \nabla h \right] dx \end{aligned}$$

Pour une norme à définir,on admet que $\int_\Omega [\nabla v \nabla h]\, dx = O(h^2)$. La différentielle de J en v est donc l'application linéaire (dont la continuité est à préciser) qui à h tel que $h_{|\Gamma} = 0$ associe $\int_\Omega [\nabla v \nabla h - fh]\, dx$. Si J minimum en u alors la différentielle de J est nulle en u et pour tout h nul sur Γ :

$$0 = \int_\Omega [\nabla u \nabla h - fh]\, dx = \int_\Omega [-\Delta w - f]\, h dx$$

et donc $-\Delta u = f$ et u est solution de (P).

Réciproquement si u est solution de (P) alors $\nabla J(u) = 0$ et comme J est convexe on peut voir que J atteint un minimum en u.

Plusieurs formulations pour le même problème :

– Equation aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

– Optimisation (énergie) :

$$\underset{v \in V}{Min}\ J(v)$$

– Formulation variationnelle :

$$\forall h,\ h_{|\Gamma} = 0, \int \nabla u \nabla h = \int f h$$

Buts du cours :

– Mettre en place un "cadre" théorique dans lequel on a “le droit” de faire les calculs précédents
– Méthodes numériques basées sur la formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles

Chapitre 2

Rappels

2.1 Théorème de projection dans un espace de Hilbert.

Définition 1 *Espace de Hilbert : H espace vectoriel réel, $(.,.)$ produit scalaire, H complet pour la norme $\sqrt{\langle x, x\rangle}$*

Théorème 2 *Projection sur un convexe. Soit H un espace de Hilbert U un sous ensemble convexe fermé non vide de H, alors il existe un élément unique de U de norme minimum.*

Démonstration

Identité du parallèlogramme : $x, y \in H$

$$\|x + y^2\| + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ou encore :

$$\frac{1}{4}\|x - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \|\frac{x+y}{2}\|^2$$

Soit $\delta = \inf\{\|x\| / x \in U\}$. Démontrons l'unicité d'un éventuel élément de U de norme minimale. Supposons qu'il y en ait 2 : $x, y \in U$, alors $\frac{x+y}{2} \in U$ par convexité de U. Alors par l'identité du parallélogramme on a :

$$\|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2 = 0$$

Ce qui prouve $x = y$ et l'unicité est démontrée. Construisons à présent une suite d'éléments de U dont la norme tende vers δ :
$\delta + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$, donc $\exists\ u_n \in U$ tel que $\|u_n\| \leq \delta + \frac{1}{n}$. Mais on a aussi $\delta \leq \|u_n\|$, donc $\|u_n\| \to \delta$

Pour $n, m \in N$, on peut écrire par l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &\leq 2\|u_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\delta^2 \leq 2(\delta + \frac{1}{n})^2 + 2(\delta + \frac{1}{m})^2 - 4\delta^2 \\ &\leq 4\delta(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \end{aligned}$$

donc (u_n) est de Cauchy, donc u_n converge dans H vers une limite u, puisque H est complet. Comme U est fermé, $u \in U$. $\|.\|$est continue donc $\|u_n\| \to \|u\| = \delta$.
♦

Généralisation
$\forall\ x_0 \in H,\ \exists!\ u \in U,\ \|u - x_0\| = \min\limits_{v \in U} \|v - x_0\|$

Preuve : on applique le résultat précédent à $x_0 - U$ dont on prouve facilement qu'il est convexe fermé.

Définition 3 *L'application qui à $x \in H$ associe $Px \in U$ tel que*

$$\|Px - x\| = \min_{v \in U} \|v - x\|$$

s'appelle projection sur U.

Théorème 4 *U convexe fermé, P projection sur U. Alors Px est caractérisé par :*

$$\forall v \in U,\ (Px - v, x - Px) \geq 0$$

Démonstration
Soit $v \in U$. Alors $\forall \lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)Px + \lambda v \in U$. Donc :

$$\begin{aligned}
\|x - Px^2\| &\leq \|x - ((1-\lambda)Px + \lambda v)\|^2 \\
&\leq \|x - Px + \lambda(Px - v)\|^2 \\
&\leq \|x - Px\|^2 + \lambda(Px - v, x - Px) + \lambda^2 \|(Px - v)\|^2
\end{aligned}$$

Pour $\lambda \neq 0$ on a donc :

$$0 \leq (Px - v, x - Px) + \lambda \|(Px - v)\|^2$$

en passant à la limite en 0 pour λ, on obtient :

$$0 \leq (Px - v, x - Px)$$

Réciproquement, soit $u \in U$ tel que $\forall v \in U,\ (u - v, x - u) \geq 0$. Alors on peut écrire pour tout $v \in U$:

$$\begin{aligned}
\|x - v\|^2 &= \|x - u + u - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - v\|^2 + (x - u, u - v) \\
\|x - v\|^2 &\geq \|x - u\|^2
\end{aligned}$$

donc $u = Px$.
♦

2.2 Théorème de Riesz

Définition 5 *Soit V un espace vectoriel normé, on appelle V' l'ensemble des formes linéaires continues sur V. (forme linéaire = application linéaire de V dans R)*

Théorème 6 *(Rappel) Soit H un espace de Hilbert, alors $\exists\ \sigma$ linéaire isométrie bijective de H' sur H telle :*

$$\forall\ f \in H', \forall\ x \in H,\ f(x) = (\sigma(f), x)$$

et $\|\sigma(f)\|_H = \|f\|_{H'}$

2.3 Théorème du point fixe dans un espace complet

Théorème 7 *(Rappel) Soit (E, d) un espace métrique complet. $f : E \rightarrow E$ contractante, c'est à dire :*

$$\exists K < 1,\, d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$$

alors $\exists !\ x,\ f(x) = x$ *et* $x = \lim\ x_n$ *ou* $x_{n+1} = f(x_n)$

Chapitre 3

Problème variationnel abstrait

Soit V espace vectoriel normé, $U \subset V$ convexe fermé non vide,
$a : V \times V \rightarrow R$ forme bililinéaire symétrique continue, la continuité s'écrit $\exists M$, $\forall x, y \in V$:

$$|a(x,y)| \leq M\|x\|.\|y\|$$

$f : V \rightarrow R$ forme linéaire continue, la continuité s'écrit $\exists K$, $\forall x \in V$:

$$|f(x)| \leq K\|x\|$$

Définition 8 *On dit que a est V-elliptique si et seulement si :*

$$\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in V,\ a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

Soit $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$. On définit le problème (P) par :

$$\text{Trouver } u \in U \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Théorème 9 *Lax Milgram (première forme). Si V est complet (Banach), si a est V-elliptique, alors le problème P admet une unique solution u caractérisée par :*

$$u \in U, \forall\ v \in U,\ a(u, v-u) \geq f(v-u)$$

Démonstration

On a pour tout x : $a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$, $a(.,.)$ définit donc un produit scalaire. Comme

$$\sqrt{\alpha}\|x\| \leq \sqrt{a(x,x)} \leq \sqrt{M}\|x|$$

la norme associée est équivalente à la norme de V. V muni de cette nouvelle norme $\|.\|_a$ est donc un espace de Hilbert. Soit σ l'isométrie canonique de Riesz. Comme f est linéaire continue, on peut écrire :

$$\forall v \in V,\ f(v) = a(\sigma f, v)$$

On note σf au lieu de $\sigma(f)$. On a :

$$\begin{aligned}\forall v \in V,\ J(v) &= \frac{1}{2}a(v,v) - a(\sigma f, v)\\ &= \frac{1}{2}a(v-\sigma f, v-\sigma f) - a(\sigma f, \sigma f)\end{aligned}$$

Chercher $\min_{v\in U} J(v)$ est équivalent à chercher

$$\min_{v\in U} \sqrt{a(v-\sigma f, v-\sigma f)} = \min_{v\in U} \|v-\sigma f\|_a^2$$

puisque le terme $a(\sigma f, \sigma f)$ est une constante. Par le théorème de projection ce problème a une unique solution qui est :

$$u = P(\sigma f)$$

où P désigne la projection sur U. Le théorème de projection nous indique que u est caractérisé par :

$$\begin{aligned}\forall v \in U, \qquad & a(P(\sigma f) - v, \sigma f - P(\sigma f)) \geq 0\\ & a(u-v, \sigma f - u) \geq 0\\ & a(u-v, -u) \geq a(u-v, \sigma f)\\ & a(u, v-u) \geq a(\sigma f, v-u) = f(v-u)\end{aligned}$$

♦

Remarque 1 *Si $U = V$, u est solution de:*

$$\forall\ v \in V,\ a(u,v) = f(v)$$

(lien avec le problème modèle)

Théorème 10 *Lax Milgram (deuxième forme). V Hilbert, a bilinéaire, symétrique, continue et V-elliptique. $f : V \to R$ linéaire continue. Alors le problème variationnel :*

$$\textit{Trouver } u \in U \textit{ tel que} \forall\ v \in V,\ a(u,v) = f(v)$$

a une solution unique

Démonstration

Unicité.
S'il existe 2 solutions $u_1$et u_2, on peut écrire :

$$\forall\ v \in V,\ a(u_1, v) = f(v) = a(u_2, v)$$

et alors :

$$\forall\ v \in V,\ a(u_1 - u_2, v) = 0$$

En particulier $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ et donc $u_1 = u_2$.
Existence.
$u \in V$ fixé. L'application $Au : v \mapsto a(u,v)$ est linéaire continue ($Au(v) = a(u,v)$). A définit donc une application de V dans V' :

$$\begin{aligned} A \quad : \quad & V \rightarrow V' \\ & u \mapsto Au \end{aligned}$$

Il est clair que A est linéaire. A est continue :

$$|Au(v)| = |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$$

par la continuité de a, et donc $\|Au\| \leq M\|u\|$ et A est bien continue.
On peut écrire :

$$\forall\ v \in V,\ a(u,v) = f(v) \Leftrightarrow Au = f$$

Soit $\sigma : V' \rightarrow V$ l'isométrie de Riesz. On peut écrire :

$$Au = f \Leftrightarrow \sigma(Au) = \sigma f$$

Notre problème est donc équivalent à cette dernière équation :$\sigma(Au) = \sigma f$. On va montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & V \rightarrow V \\ & v \mapsto g(v) = v - \rho(\sigma(Av) - \sigma f) \end{aligned}$$

soit contractante. Si cela est démontré, alors g admet un point fixe $g(v) = v$, c'est à dire $v = v - \rho(\sigma(Av) - \sigma(f))$ et donc $\sigma(Av) = \sigma(f)$, soit $Av = f$ et le problème est résolu. Démontrons donc que l'on peut trouver $\rho > 0$ tel que g soit contractante. On a :

$$\begin{aligned} \|g(v_1) - g(v_2)\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho\sigma(A(v_1 - v_2))\|^2 \\ &= \|v - \rho\sigma(Av)\|^2 \end{aligned}$$

avec $v = v_1 - v_2$.

$$\|g(v_1) - g(v_2)\|^2 = \|v\|^2 - 2\rho(v, \sigma(Av)) + \rho^2\|\sigma(Av)\|^2$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \|\sigma(Av)\| &= \|Av\| \leq M\,\|v\| \\ (v, \sigma(Av)) &= Av(v) = a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\|g(v_1) - g(v_2)\|^2 \leq (1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha)\|v_1 - v_2\|^2$$

Donc si :

$$1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha < 1$$

alors g est contractante, ce qui est possible pour :

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$$

♦

Théorème 11 *Avec les hypothèses précédentes, en posant :*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$$

le problème : trouver u *tel que :*

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

admet une unique solution qui est la solution du problème variationnel.

Démonstration
Soit u solution du problème variationnel $a(u,v) = f(v)$ pour tout $v \in V$. Alors pour tout v :

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + a(u,v) - f(v) + \frac{1}{2}a(v,v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \\ &\geq J(u) \end{aligned}$$

et J atteint bien un minimum en u, et il est strict puisque l'inégalité précédente est stricte pour $v \neq 0$.

A présent quels espaces et quelles normes choisir pour que le problème modèle ait un sens ?

Chapitre 4

Distributions

4.1 Définitions

Rappel : Si K est un compact de R^n, on peut définir une norme sur $C^0(K)$: pour v continu sur K, on pose :

$$\|v\| = \sup_{x \in K} |v(x)|$$

Définition 12 *Pour Ω ouvert de R^n, pour $v : \Omega \to R$, on appelle support de v :*

$$Supp(v) = \overline{\{x \in \Omega \ / \ f(x) \neq 0\}}$$

Le support est donc fermé.

Définition 13 *Ω ouvert de R^n, $D(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \ / \ Supp(v) \ compact\}$*

Théorème 14 *(admis) $D(\Omega)$ dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

On définit dans $D(\Omega)$, la notion de suites convergentes

Définition 15 *La suite φ_n de fonctions de $D(\Omega)$ converge vers φ dans $D(\Omega)$ si et seulement si :*
- $\exists$ K compact $\forall$ n, $Supp(\varphi_n) \subset K$
- $\forall$ $m, \forall \alpha \in N^m$ $\quad \partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément
Où l'on a noté $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ et $\partial^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_m}}$

Définition 16 *$T : D(\Omega) \to R$ linéaire est une distribution si et seulement si pour toute suite convergente φ_n de $D(\Omega)$ de limite φ on a $(T, \varphi_n) \to (T, \varphi)$. (on a noté $(T, \varphi_n) = T(\varphi_n)$)*

Définition 17 *On note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.*

Remarque 2 *On a définit une “pseudo topologie” sur $D(\Omega)$ par la définition des suites convergentes. Le problème est que l'on ne peut pas définir cette pseudo topologie par une norme sur $D(\Omega)$. La notation $D'(\Omega)$ correspond bien à l'ensemble des formes linéaires “continues” pour cette pseudo topologie sur $D(\Omega)$. De même on définit une pseudo topologie sur $D'(\Omega)$ en définissant la convergence des suites de distributions.*

Définition 18 *$T_n \in D'(\Omega)$ est convergente vers $T \in D'(\Omega)$ si et seulement si pour toute fonction φ de $D(\Omega)$, on a :*

$$(T_n, \varphi) \to (T, \varphi)$$

Exemple 19 *$a \in \Omega$, $(T_a, \varphi) = \varphi(a)$, T_a définit une distribution, puisque si φ_n converge uniformément vers φ, alors $\varphi_n(a) = T_a(\varphi)$ tend vers $\varphi(a) = T_a(\varphi)$. On note $T_a = \delta_a$, Dirac en a.*

Exemple 20 *$f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $(T_f, \varphi) = \int_\Omega f\varphi$. T_f définit une distribution. Si φ_n converge uniformément vers φ, alors $\int_\Omega f\varphi_n = (T_f, \varphi_n)$ tend vers $\int_\Omega f\varphi = (T_f, \varphi)$.*

Exercice 4.1.1 *Démontrez que $f \mapsto T_f$ est injective et continue de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$ (pour la pseudo topologie définie précédemment).*

On peut donc identifier $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous-espace de $D'(\Omega)$.

Exercice 4.1.2 *Démontrez que pour $f \in L^2(\Omega)$, $(T_f, \varphi) = \int_\Omega f\varphi$ définit aussi une distribution. Démontrez que $f \mapsto T_f$ est injective et continue de $L^2(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$.*

On peut donc identifier $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de $D'(\Omega)$.

On peut aussi dire que $D'(\Omega)$ est un “sur ensemble” de $L^2(\Omega)$ et de $L^1_{loc}(\Omega)$ qui généralise la notion de fonction.

4.2 Opérations sur les distributions

4.2.1 Addition, multiplication par un réel

$D'(\Omega)$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel, comme sous espace vectoriel de l'espace des applications linéaires de $D(\Omega)$ dans R.
On définit donc de manière “naturelle” la somme de deux distributions et la multiplication d'une distribution par un réel.

4.2.2 Multiplication par une fonction C^∞

Définition 21 *Soit $g \in C^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$, on définit gT le produit de T par g par la formule :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega),\ \langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$$

Exercice 4.2.1 *Démontrez que la formule précédente définit bien une distribution.*

4.2.3 Dérivation d'une distribution

Définition 22 *Soit $\alpha \in N^n$, $T \in D'(\Omega)$, on définit $\partial^\alpha T$ par :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega),\ (\partial^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(T, \partial^\alpha \varphi)$$

Exercice 4.2.2 *Démontrez que la formule précédente définit bien une distribution.*

Théorème 23 *Cette notion généralise la dérivation usuelle, c'est à dire que si $f \in L^2(\Omega)$ est dérivable et $f' \in L^2(\Omega)$ alors $T'_f = T_{f'}$*

Démonstration

On ne fait la démonstration ici que dans le cas $\Omega \subset R$. On a pour tout $\varphi \in D(\Omega)$:

$$\int_\Omega f'\varphi = \int_\Omega (f\varphi)' - \int_\Omega f\varphi' = -\int_\Omega f\varphi'$$

puisque φ est à support compact inclus dans Ω. D'autre part :

$$\begin{aligned}(T'_f, \varphi) &= -(T_f, \varphi') \text{ par définition de la dérivation} \\ &= -\int_\Omega f\varphi' \text{ par définition de } T_f \\ &= \int_\Omega f'\varphi = (T_{f'}, \varphi)\end{aligned}$$

et donc $T'_f = T_{f'}$.

♦

Théorème 24 *Toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ et de $L^1_{loc}(\Omega)$ sont (indéfiniement) dérivables au sens des distributions.*

Démonstration

Immédiat.

Que signifie l'énoncé précédent ? A partir du moment où les notions de dérivée coïncident pour les distributions et les fonctions, on peut définir la dérivée de n'importe quelle fonction de $L^2(\Omega)$ ou de $L^1_{loc}(\Omega)$ comme la dérivée de la distribution associée.

Cela est peut-être "surprenant" au premier abord, mais c'est là que réside la puissance de la théorie des distributions, c'est une généralisation de la notion de fonction à laquelle se généralise la notion de dérivation, généralisant par la même tout le calcul différentiel.

Chapitre 5

Espaces de Sobolev

5.1 Définitions

Définition 25 *Pour $m \in N^*$, et Ω ouvert de R^n, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ / \ \forall \ \alpha \in N_m, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}$$

Définition 26 $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

Théorème 27 *$H^m(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega)$.*

Exercice 5.1.1 *Démontrez ce théorème.*

Théorème 28 *Pour $v \in H^m(\Omega)$*

$$\|v\|_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|<m} |\partial^\alpha v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme qui est issue du produit scalaire :

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \partial^\alpha u \ \partial^\alpha v$$

Exercice 5.1.2 *Démontrez le théorème précédent.*

Remarque 3 *On peut écrire :*

$$\|v\|_m = \left(\sum_{|\alpha|<m} \|\partial^\alpha v\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

5.2 Complétude de $H^m(\Omega)$

Théorème 29 *$(H^m(\Omega), \|.\|_m)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration pour $m = 1$
Le produit scalaire est défini par :

$$(u,v) = \int_\Omega (uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}) = \int_\Omega (uv + \nabla u.\nabla v)$$

et la norme par :

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_0^2$$

Soit (v_k) suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in N,\ \forall k, l > n,\ \|v_k - v_l\|_1 \leq \varepsilon$$

Mais comme :

$$\|v_k - v_l\|_1^2 = \|v_k - v_l\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_l}{\partial x_i}\|_0^2$$

v_k est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, v_k converge vers une limite $v \in L^2(\Omega)$ (pour la norme de $L^2(\Omega)$).
De la même manière, $\forall i$, $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Soit $u_i \in L^2(\Omega)$ sa limite pour la njorme de $L^2(\Omega)$. Prouvons que pour tout i, $\frac{\partial v}{\partial x_i} = u_i$:

$$\forall\ \varphi \in D(\Omega),\ \int_\Omega \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega v_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Les suites v_k et $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ étant convergentes dans $L^2(\Omega)$, on peut passer à la limite dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \forall\ \varphi \in D(\Omega),\ \int_\Omega u_i\varphi &= -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ (u_i, \varphi) &= -(v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = (\frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi) \end{aligned}$$

ce qui permet donc de déduire : $\frac{\partial v}{\partial x_i} = u_i$. Cela prouve donc que $v \in H^1(\Omega)$.
On peut dans l'expression :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in N,\ \forall k, l > n,\ \|v_k - v_l\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_l}{\partial x_i}\|_0^2 \leq \varepsilon^2$$

passer à la limite sur l pour obtenir :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in N,\ \forall k > n,\ \|v_k - v\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\|_0^2 \leq \varepsilon^2$$

ce qui peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in N,\ \forall k > n,\ \|v_k - v\|_1 \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que v_k tend vers v dans $H^1(\Omega)$.
♦

Théorème 30 *(admis)* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^m(\Omega)$.

Théorème 31 *(admis)* $D(R^n)$ *est dense dans* $H^m(R^n)$

Définition 32 *On pose* $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$, *adhérence pour la norme* $\|.\|_m$.

Théorème 33 *(admis) Si* $\Omega \neq R^n$, $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$

Théorème 34 $H_0^m(\Omega)$ *est complet pour la norme* $\|.\|_m$.

Démonstration
C'est l'adhérence de $D(\Omega)$, c'est donc un ensemble fermé dans un espace complet.
♦

5.3 Inégalité de Poincaré

Définition 35 $|.|$ *définit une semi norme sur un espace vectoriel* E *si et seulement si :*
1 c'est une application de E *dans* R^+
2 $\forall x, y \in E, |x+y| \leq |x| + |y|$
3 $\forall x \in E, \forall \alpha \in R, |\alpha x| = |\alpha|.|x|$

On a donc les propriétés d'une norme, sauf $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 36 *Soit* $|.|_m$ *sur l'espace* $H^m(\Omega)$ *défini par :*

$$|v|_m = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 37 $|.|_0 = \|.\|_0$

Théorème 38 $|.|_m$ *définit une semi norme sur* $H^m(\Omega)$.

Exercice 5.3.1 *Démontrez le théorème précédent.*

Théorème 39 *(admis) Inégalité de Poincaré*:

$$\exists\ C(\Omega) \in R,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_0 \leq C(\Omega)\,|v|_1$$

Corollaire 40 *Sur* $H_0^m(\Omega)$, $|.|_m$ *est une norme équivalente à* $\|.\|_m$.

Démonstration pour $m = 1$
On a toujours $|.|_1 \leq \|.\|_1$. Et pour $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|v\|_1 = |v|_0^2 + |v|_1^2 \leq (1 + C(\Omega)^2)\,|v|_1^2$$

♦

Exercice 5.3.2 *Démontrez le corollaire pour* $m \geq 1$.

5.4 Trace

Théorème 41 *(Rappel) Prolongement d'une application linéaire continue. Si E et F sont deux espaces vectoriels normés complets (espaces de Banach), si f est une application linéaire continue d'un sous espace vectoriel D dense de E dans F, alors il existe un unique prolongement linéaire continu de f de E dans F.*

Exercice 5.4.1 *Redémontrez ce théorème.*

Théorème 42 *(admis) Pour $n \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont en général pas continues sur Ω et n'ont pas nécéssairement de prolongement par continuité sur $\overline{\Omega}$. Pour $n = 1$, $H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, c'est à dire que pour $n = 1$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont presque partout égales à des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.*

On pose $\Gamma = \partial\Omega$. On suppose Γ “suffisament” régulier, ce qui signifie plus rigoureusement que Γ est une variété de dimension $n-1$ de classe C^1, Ω étant localement d'un seul coté de Γ.

Théorème 43 *(admis) L'application*

$$\begin{aligned} C^\infty(\overline{\Omega}) &\to L^2(\Gamma) \\ v &\mapsto Tr(v) \end{aligned}$$

qui à v associe sa trace sur le bord de Ω est linéaire continue pour la norme $\|.\|_1$ sur $C^\infty(\overline{\Omega})$. On peut prolonger cette application en une application linéaire continue sur $H^1(\Omega)$.

On continue à noter $Tr(v)$ le prolongement à $H^1(\Omega)$ de cette application.

Théorème 44 *(admis)* $H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega) \,/\, Tr(v) = 0 \textit{ sur } \Gamma\right\} = KerTr$

Exercice 5.4.2 *Démontrez l'inclusion $\subset$ dans le théorème précédent.*

Théorème 45 *(admis)$\operatorname{Im} Tr \neq L^2(\Gamma)$, ce qui signifie qu'il existe des fonctions de $L^2(\Gamma)$ qui ne sont pas la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$.*

Sur Γ on peut définir une normale extérieure unitaire (définie Γ-presque partout). On la note $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, avec $\sum_i \nu_i^2 = 1$

Définition 46 *La dérivée normale externe d'une fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ est définie sur Γ par :*

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = \nu.\nabla v$$

Théorème 47 *Si $v \in H^2(\Omega)$, on peut définir $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ sur Γ et $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma)$.*

Démonstration

Comme $v \in H^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ donc $Tr(\dfrac{\partial v}{\partial x_i})$ est défini sur Γ et appartient à $L^2(\Gamma)$. Comme $|\nu_i| \leq 1$, $\nu_i \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Gamma)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_i \nu_i Tr(\dfrac{\partial v}{\partial x_i}) \in L^2(\Gamma)$.

♦

Théorème 48 *(admis)*$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \quad / \ Tr(v) = 0 \textit{ et } \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \textit{ sur } \Gamma \right\}$

5.5 Formules de Green

Il s'agit de généralisations de l'intégration par parties.

Théorème 49 *(admis)*

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) \qquad \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_\Gamma uv\nu_i$$

Exercice 5.5.1 *Démontrez que :*

$$\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega) \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v = -\int_\Omega \Delta u . v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v$$

Exercice 5.5.2 *Démontrez que :*

$$\forall u \in H^4(\Omega), \forall v \in H^2(\Omega) \qquad \int_\Omega \Delta u . \Delta v = \int_\Omega \Delta^2 u . v - \int_\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v + \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

Chapitre 6

Exemples

Rappelons le contexte général :

- V Hilbert, $a(.,.)$ symétrique bilinéaire continue V-elliptique
- $f \in V'$
- $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$

Alors les problèmes :

- Trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall v \in V \quad a(u,v) = f(v)$$

- Trouver $u \in V$ tel que :

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

sont équivalents et ont la même solution unique.

On va donner des exemples d'applications de ce théorème en précisant les choix de V, a et f.

6.1 Exemple 1

- $U = V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_1$
- $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + buv) \quad b \in L^\infty(\Omega),\ b \geq 0$
- $f(v) = \int_\Omega fv,\ f \in L^2(\Omega)$

Continuité de a

Soit $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \max(1, \|b\|_\infty)\left(\int_\Omega |\nabla u.\nabla v| + \int_\Omega |uv|\right) \\
&\leq M\left(\sum_i \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|.|\frac{\partial v}{\partial x_i}| + |u|.|v|\right) \\
&\leq M\left(\sum_i \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 + |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_i \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 + |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M\|u\|_1\|v\|_1
\end{aligned}$$

Ellipticité de a
$v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + bv^2 \geq \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 = |v|_1$$

sur $H_0^1(\Omega)$, $|v|_1$ équivalent à $\|v\|_1$, donc $\exists C\ \forall v\ |v|_1 \geq C\,\|v\|_1$, donc :

$$a(v,v) \geq C\,\|v\|_1$$

Continuité de f

$$|f(v)| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\|_0\|v\|_0 \leq \|f\|_0\|v\|_1$$

donc f continue.
L'application du théorème de Lax Milgram permet de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution du problème variationnel :

$$u \in H_0^1(\Omega),\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv = \int_\Omega fv$$

qui est aussi l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ où est atteint le minimum de :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + bv^2 - \int_\Omega fv$$

Essayons maintenant d'interpréter ce problème variationnel en termes d'équations aux dérivées partielles.

Interprétation du problème variationnel
A partir du problème variationnel on peut écrire : on peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
u \in H_0^1(\Omega),\ \forall v \in D(\Omega),\ \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv &= \int_\Omega fv \\
\sum_i (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (bu, v) &= (f, v) \\
-\sum_i (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v) + (bu, v) &= (f, v) \\
(-\Delta u + bu - f, v) &= 0
\end{aligned}$$

et donc la "distribution" u vérifie dans $D'(\Omega)$:

$$-\Delta u + bu = f$$

Mais comme $f \in L^2(\Omega)$, l'égalité précédente est vraie dans $L^2(\Omega)$, et on peut écrire :

$$-\Delta u + bu = f \text{ presque partout dans } \Omega$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on peut finalement dire que u est solution du problème :

$$\begin{aligned}
-\Delta u + bu &= f \text{ pp dans } \Omega \\
u_{|\Gamma} &= 0
\end{aligned}$$

que l'on appelle "problème aux limites". La condition $u_{|\Gamma} = 0$ est appelée condition limite de Dirichlet.

Réciproque

Réciproquement si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est solution du problème aux limites précédents, alors en multipliant l'équation aux dérivées partielles par "une fonction test" de $D(\Omega)$, et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\forall v \in D(\Omega), \int_\Omega (-\Delta u + bu)v = \int_\Omega fv$$

puis par la formule de Green :

$$\forall v \in D(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v + buv = \int_\Omega fv$$

par densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on peut écrire :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v + buv = \int_\Omega fv$$

et u est solution du problème variationnel initial.

6.2 Exemple 2

- $U = V = H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_1$
- $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_i} + buv = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + buv$
- $b \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \beta > 0, \text{pp } x \in \Omega$, $b(x) \geq \beta$.
- $f(v) = \int_\Omega fv,\ f \in L^2(\Omega)$

Exercice 6.2.1 *Démontrer que a est continue et V-elliptique et que f est continue.*

Le problème trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv = \int_\Omega fv$$

a une solution unique.

Interprétation du problème variationnel

A partir du problème variationnel, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega), \forall v \in D(\Omega), \sum_i (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (bu, v) &= (f, v) \\ (-\Delta u + bu - f, v) &= 0 \end{aligned}$$

donc la distribution u vérifie dans $D'(\Omega)$:

$$-\Delta u + bu = f$$

Mais comme $f \in L^2(\Omega)$, l'égalité précédente est vraie dans $L^2(\Omega)$, et on peut écrire :

$$-\Delta u + bu = f \text{ pp dans } \Omega$$

Supposons $u \in H^2(\Omega)$, alors par la formule de Green, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\forall v \in H^1(\Omega), \qquad & \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv = \int_\Omega fv \\
& \int_\Omega (-\Delta u + bu - f)\, v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \upsilon} v = 0 \\
& \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \upsilon} v = 0
\end{aligned}$$

A partir de là, on aimerait bien conclure que $\frac{\partial u}{\partial \upsilon} = 0$. Cela est vrai parce que l'on a le :

Théorème 50 *(admis) L'image de $H^1(\Omega)$ par l'application trace est dense dans $L^2(\Gamma)$.*

Finalement u est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned}
-\Delta u + bu &= f \text{ pp dans } \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial \upsilon} &= 0 \text{ sur } \Gamma
\end{aligned}$$

On appelle cette condition limite : condition de Neumann.

Réciproque

Si $u \in H^2(\Omega)$ est solution du problème aux limites précédent, alors en multipliant l'équation aux dérivées partielles par une fonction de $H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall v \in H^1(\Omega), \qquad & \int_\Omega (-\Delta u + bu - f)\, v = 0 \\
& \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \upsilon} v = \int_\Omega fv \\
& a(u,v) = f(v)
\end{aligned}$$

et u est donc solution du problème variationnel.

6.3 Exemple 3

- $U = V = H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_1$
- $a(u,v)$ identique à l'exemple 2
- $f(v) = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gv$ où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$

Démontrons que $v \longmapsto \int_\Gamma gv$ est linéaire continue sur $H^1(\Omega)$.

$$|\int_\Gamma gv| \leq \|g\|_0 \|Tr(v)\|_0 \leq \|g\|_0 \|Tr\|.\|v\|_1$$

ce qui démontre le résultat. Le probléme variationnel :

$$u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + buv = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gv$$

a une solution unique.

Interprétation du problème variationnel

Exercice 6.3.1 *Démontrez que la solution du problème variationnel précédent est solution du problème aux limites :*

$$\begin{aligned} -\Delta u + bu &= f \text{ pp dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} &= g \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

Exercice 6.3.2 *Etablir la réciproque.*

6.4 Exemple 4 :

- $V = H^1(\Omega)$
- $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$
- $b \in L^\infty(\Omega)$, $\exists \beta > 0, \text{pp } x \in \Omega$, $b(x) \geq \beta$
- $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial v}{\partial x_j} + buv$
- $\exists \gamma > 0, \forall \xi \in R^n, \text{pp } x \in \Omega$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2$
- $f(v) = \int_\Omega fv$, avec $f \in L^2(\Omega)$

a est visiblement bilinéaire et symétrique, f est linéaire continue, de sorte que pour utiliser Lax-Milgram, il reste à démontrer la continuité et l'ellipticité de a.

Continuité de a

On appelle A la matrice carrée de terme général a_{ij}. A est symétrique définie positive d'après les propriétés des a_{ij}. Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u, A.\nabla v) + buv$$

où $(.,.)$ désigne ici le produit scalaire canonique de R^n. On a alors en utilisant Cauchy Schwartz dans R^n :

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|A\|_2 \left(\sum_{i=1}^n |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|b\|_\infty |u|.|v|$$

Soit K est la constante d'équivalence entre les normes $\|.\|_2$ et $\max\limits_{ij}$ sur les matrices carrées et soit :

$$M = \max \left(\max_{ij} \|a_{ij}\|, \|b\|_\infty \right)$$

en utilisant Cauchy Schwartz dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq M \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 + |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 + |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \|u\|_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

et a est continue.

Ellipticité de a
Pour $v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + bv^2 \geq \gamma \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \beta|v|_0^2 \\ &\geq \gamma|v|_1^2 + \beta|v|_0^2 \geq \min(\gamma,\beta)\|v\|_1^2 \end{aligned}$$

Le problème trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + buv = \int_\Omega fv$$

a une solution unique.

Interprétation du problème variationnel
A partir du problème variationnel on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall v \in D(\Omega), \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}) + (bu,v) &= (f,v) \\ \sum_{i,j=1}^n (-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), v) + (bu,v) &= (f,v) \\ (-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu - f, v) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la distribution u vérifie dans $D'(\Omega)$:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu = f$$

mais comme $f \in L^2(\Omega)$, l'égalité a lieu dans $L^2(\Omega)$, et on a donc :

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu = f \text{ pp dans } \Omega$$

Supposons $u \in H^2(\Omega)$. En utilisant la formule de Green sur la formulation variationnelle, on a $\forall v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + buv = \int_\Omega fv \\ &\int_\Omega \left(-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu - f\right) v + \int_\Gamma \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\right) v = 0 \\ &\int_\Gamma \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j\right) v = 0 \end{aligned}$$

On pose pour $u \in H^1(\Omega)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j$$

Finalement u est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + bu &= f \text{ pp dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A} &= 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

Exercice 6.4.1 *Etablir la réciproque*

Chapitre 7

Problème approché

7.1 Généralités

V Hilbert, $f \in V'$, a bilinéaire symétrique, continue elliptique. Par Lax Milgram, le problème : trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall v \in V \quad a(u, v) = f(v)$$

a une unique solution.

Soit $V_h \subset V$ un sous espace de V de dimension finie.

Définition 51 *On appelle problème approché dans V_h : trouver $u_h \in V_h$ tel que :*

$$\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = f(v_h)$$

Théorème 52 *Le problème approché a une unique solution.*

Démonstration

V_h étant de dimension finie, il est complet. On peut appliquer Lax Milgram dans V_h.

♦

Théorème 53 *Il existe une constante C indépendante de V_h telle que:*

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

Démonstration

On a :

$$\forall v_h \in V_h,\ a(u, v_h) = f(v_h)$$

et :

$$\forall v_h \in V_h,\ a(u_h, v_h) = f(v_h)$$

d'où :

$$\forall v_h \in V_h,\ a(u - u_h, v_h) = 0$$

On a :

$$\begin{aligned}\forall v_h \in V_h,\ a(u-u_h,u-u_h) &= a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\\ &= a(u-u_h,u-v_h)\\ &\leq M\|u-u_h\|.\|u-v_h\|\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$a(u-u_h,u-u_h) \geq \alpha\|u-u_h\|^2$$

d'où :

$$\forall v_h \in V_h,\ \|u-u_h\| \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|$$

d'où le résultat annoncé.

♦

Remarque 4 *On a démontré que :*

$$\forall v_h \in V_h,\ a(u-u_h,v_h)=0$$

cela signifie que u_h est la projection de u sur V_h pour le produit scalaire défini par a.

Remarque 5 *On peut "faire mieux" pour la constante C :*

Théorème 54 $\forall v_h \in V_h,\ \|u-u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\|u-v_h\|$.

Démonstration
$\forall\ v_h \in V_h$ on a :

$$\begin{aligned}a(u-v_h,u-v_h) &= a((u-u_{h)}+(u_h-v_h),(u-u_{h)}+(u_h-v_h))\\ & \quad a(u-u_h,u-v_h)+2a(u_h-v_h,u-u_h)+a(u_h-v_h,u_h-v_h)\\ &= a(u-u_h,u-u_h)+a(u_h-v_h,u_h-v_h)\end{aligned}$$

puisque $a(u_h-v_h,u-u_h)=0$ et donc :

$$a(u-u_h,u-u_h) \leq a(u-v_h,u-v_h)$$

et :

$$\alpha\,\|u-u_h\|^2 \leq M\,\|u-v_h\|^2$$

♦

7.2 Système linéaire du problème approché

Nous allons démontrer d'une autre manière (plus élémentaire) que le problème approché a une solution unique.

Soit $(e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ une base de V_h. Soit ξ_j les coordonnées d'une éventuelle solution u_h du problème approché :

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$$

Théorème 55 *Le problème approché :*

$$\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = f(v_h)$$

est équivalent à

$$\forall i \in [1, n],\ a(u_h, e_i) = f(e_i)$$

Démonstration
Si u_h est solution du problème approché, alors la deuxième proposition est vraie en prenant $v_h = e_j$. Réciproquement, si u_h vérifie la deuxième proposition, alors tout $v_h \in V_h$ étant combinaison linéaire des e_j, u_h est solution du problème approché par linéarité de f et bilinéarité de a.
♦

Théorème 56 *u_h est solution du problème approché si et seulement si ses coordonnées ξ_j sont solutions de :*

$$\forall i \in [1, n],\ \sum_{j=1}^{n} a(e_i, e_j)\xi_j = f(e_i)$$

Démonstration
u_h est solution du problème approché si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\forall i &\in [1, n],\ a(u_h, e_i) = f(e_i) \Longleftrightarrow \\
\forall i &\in [1, n],\ a(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j, e_i) = f(e_i) \Longleftrightarrow \\
\forall i &\in [1, n],\ \sum_{j=1}^{n} a(e_i, e_j)\xi_j = f(e_i)
\end{aligned}$$

en se servant de la symétrie et de la bilinéarité de a.
♦

Soit A la matrice de terme général $A_{ij} = a(e_i, e_j)$. Soit $b \in R^n$ de coordonnées $b_i = f(e_i)$.

Théorème 57 *u_h est solution du problème approché si et seulement si :*

$$A\xi = b$$

Voyons si ce système linéaire a une solution. Recherchons le noyau de la matrice A. $x \in KerA$ équivaut à :

$$\forall i \in [1, n],\ \sum_{j=1}^{n} a(e_i, e_j)x_j = 0$$

En multipliant chacune de ces équations par x_i et en les additionnant toutes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a(e_i, e_j)x_j &= 0 \\
a(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) &= 0
\end{aligned}$$

Or :

$$a(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) \geq \alpha \| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \|^2$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

c'est à dire $x = 0$, et donc le noyau de A est réduit à $\{0\}$. Le système $A\xi = b$ a donc une solution et une seule qui sont les coordonnées de la solution du problème approché.

Remarque 6 *La matrice A de terme général $a(e_i, e_j)$ est la matrice de a en tant que forme bilinéaire symétrique définie positive (entraînée par l'ellipticité). A est donc symétrique définie positive, et la démonstration précédente ne fait que redémontrer ce résultat.*

Chapitre 8

Eléments finis en dimension 1

8.1 Notations et hypothèses

On reprend l'un des exemples précédents mais en dimension 1. On refait les démonstrations d'existence d'une solution avant d'introduire réellement les Eléments finis.

Problème de Dirichlet en dimension 1 :

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(\chi(x)\frac{du}{dx}\right) + \mu(x)u &= f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

$\Omega =]0,1[$
$V = H_0^1(\Omega)$
$f \in L^2(\Omega)$
$f(v) = \int_\Omega fv$
$\chi \in L^\infty(\Omega)$ et $\exists\ \alpha > 0$, $\forall x \in \Omega$, $\chi(x) \geq \alpha > 0$
$\mu \in L^\infty(\Omega)$ et $\forall x \in \Omega \quad \mu(x) \geq 0$
$a(u,v) = \int_0^1 \chi u'v' + \mu uv$ défini sur $V \times V$

8.2 Formulation variationnelle

Continuité de a
Pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_0^1 |\chi u'v'| + \int_0^1 |\mu uv| \\ &\leq \|\chi\|_\infty \int_0^1 |u'v'| + \|\mu\|_\infty \int_0^1 |uv| \\ &\leq \max(\|\chi\|_\infty, \|\mu\|_\infty) \int_0^1 |u'v'| + |uv| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M\int_0^1 (u'^2+u^2)^{\frac{1}{2}}(v'^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M\left(\int_0^1 u'^2+u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 v'^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq M\|u\|_1\|v\|_1
\end{aligned}$$

Ellipticité de a
Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(u,u) = \int_0^1 \chi u'^2 + \mu u^2 \geq \alpha \int_0^1 u'^2 \geq \alpha\,|u|_1^2$$

$|.|_1$ étant une semi norme équivalente à $\|.\|_1$ sur $H_0^1(\Omega)$, a est eliptique
Continuité de f
Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$|\int_0^1 fv| \leq \|f\|_0\|v\|_0 \leq \|f\|_0\|v\|_1$$

Le problème : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \int_0^1 \chi u'v' + \mu uv = \int_0^1 fv$$

a une unique solution.
Interprétation
On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\forall v \in D(\Omega),\ (\chi u', v') + (\mu u, v) &= (f,v) \\
(-(\chi u')' + \mu u - f, v) &= 0
\end{aligned}$$

et donc u vérifie d'abord comme distribution, mais en fait dans $L^2(\Omega)$ puisque f y est :

$$-(\chi u')' + \mu u = f$$

et comme $u \in H_0^1(\Omega)$, $u_{|\Gamma} = 0$.

Remarque 7 *En fait, u est continue et la condition $u_{|\Gamma} = 0$ signifie bien $u(0) = u(1) = 0$. On a le :*

Théorème 58 *(admis) Si Ω ouvert borné de R^n de frontière C^1 par morceaux, alors si $m > \dfrac{n}{2}$ $\quad H^m(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$*

8.3 Eléments finis

8.3.1 Choix de l'espace

Soit $I \in N$, $h = \dfrac{1}{I+1}$, $a_i = ih$ une subdivision régulière de Ω. On pose $K_i = [a_i, a_{i+1}]$. Soit P_1 l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1. On définit l'espace V_h par :

$$V_h = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ / \ v_{|K_i} \in P_1 \text{ pour } 0 \leq i \leq I \right\}$$

D'après le théorème précédent, on sait que :

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \ / \ v(0) = v(1) = 0, v_{|K_i} \in P_1 \text{ pour } 0 \leq i \leq I \right\}$$

Exercice 8.3.1 *Démontrez que V_h est un sous espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$.*

Soit φ_i la fonction de V_h (continue, linéaire par morceau) définie par : $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i \leq I$

Théorème 59 (φ_i) *est un système libre de V_h*

Démonstration
Si $\sum_i \lambda_i \varphi_i = 0$, alors en prenant la valeur en a_j on obtient $\lambda_j = 0$, et ceci pour tout j.
♦

Théorème 60 (φ_i) *est un système générateur de V_h*

Démonstration
Soit $v \in V_h$. Soit $u = \sum_{i=1}^{I} v(a_i)\varphi_i$. Alors u est une fonction de V_h qui coïncide avec v en tous les a_j. Comme elles sont toutes les deux continues linéaires par morceaux, elles coïncident partout et $v = u$, et (φ_i) est un système générateur.
♦

Il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= 1 - \frac{|x - a_i|}{h} \text{ si } x \in [a_{i-1}, a_{i+1}] \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Pour toute fonction u de V_h, on pose $u_i = u(a_i)$. On a vu précédemment que $u = \sum_{i=1}^{I} u_i \varphi_i$

8.3.2 Problème approché

On a déjà vu que le problème approché s'écrivait :

$$\forall i \in [1, I] \quad \sum_{j=1}^{I} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \int_0^1 f \varphi_i$$

On a donc besoin pour résoudre le problème approché de calculer les coefficients de la matrice de terme $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, et les coefficients du second membre $\int_0^1 f\varphi_i$.

Il est important de remarquer que par la nature des supports des φ_i, seuls les termes $A_{i,i-1}$, $A_{i,i}$ et $A_{i,i+1}$ de la matrice A sont non nuls. Grâce à la symétrie de A, on calcule uniquement A_{ii} et $A_{i-1,i}$.

On fait ici les calculs complets avec χ et μ constants. On doit calculer $a(\varphi_i,\varphi_i), a(\varphi_{i-1},\varphi_i)$.

$$\begin{aligned} A_{ii} &= a(\varphi_i,\varphi_i) = \chi\int_0^1 \varphi_i'^2 + \mu\int_0^1 \varphi_i^2 \\ A_{i-1,i} &= a(\varphi_{i-1},\varphi_i) = \chi\int_0^1 \varphi_{i-1}'\varphi_i' + \mu\int_0^1 \varphi_{i-1}\varphi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sur } [a_{i-1},a_i] : \varphi_i(x) &= 1-\frac{a_i-x}{h} \qquad \varphi_i' = \frac{1}{h} \\ \varphi_{i-1}(x) &= 1-\frac{x-a_{i-1}}{h} \qquad \varphi_{i-1}' = -\frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Sur } [a_i,a_{i+1}] : \varphi_i(x) = 1-\frac{x-a_i}{h} \qquad \varphi_i' = -\frac{1}{h}$$

Ailleurs, les fonctions en jeu sont nulles.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_i^2 &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(1-\frac{a_i-x}{h}\right)^2 dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}}\left(1-\frac{x-a_i}{h}\right)^2 dx \\ &= \frac{h}{3}\left[\left(1-\frac{a_i-x}{h}\right)^3\right]_{a_{i-1}}^{a_i} - \frac{h}{3}\left[\left(1-\frac{x-a_i}{h}\right)^3\right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &= \frac{2h}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \varphi_i'^2 = \int_{a_{i-1}}^{a_{i+1}} \frac{1}{h^2}dx = \frac{2}{h}$$

d'où :

$$a(\varphi_i,\varphi_i) = \frac{2\chi}{h} + \frac{2h\mu}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{i-1}\varphi_i &= \int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(1-\frac{a_i-x}{h}\right)\left(1-\frac{x-a_{i-1}}{h}\right) \\ & \frac{h}{6} \end{aligned}$$

après quelques calculs élémentaires.

$$\int_0^1 \varphi_{i-1}'\varphi_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} -\frac{1}{h^2}dx = -\frac{1}{h}$$

d'où :

$$a(\varphi_{i-1},\varphi_i) = -\frac{\chi}{h} + \frac{h\mu}{6}$$

Finalement, la matrice A (tridiagonale) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2\chi}{h}+\frac{2h\mu}{3}\right) & \left(-\frac{\chi}{h}+\frac{h\mu}{6}\right) & & 0 \\ \left(-\frac{\chi}{h}+\frac{h\mu}{6}\right) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \left(-\frac{\chi}{h}+\frac{h\mu}{6}\right) \\ 0 & & \left(-\frac{\chi}{h}+\frac{h\mu}{6}\right) & \left(\frac{2\chi}{h}+\frac{2h\mu}{3}\right) \end{pmatrix}$$

Théorème 61 *(admis) Convergence : si* $v \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ *alors*

$$\exists\ C, \forall h > 0, \|u - u_h\|_0 \leq Ch\,|u|_2$$

Chapitre 9

La méthode des éléments finis

9.1 Définitions

Définition 62 *La méthode des éléments finis consiste en une méthode numérique de résolution d'équations aux dérivées partielles basée sur leur formulation variationnelle et caractérisée par les 3 aspects fondamentaux qui sont décrits ci dessous.*

1. Existence d'une "triangulation" T_h de l'ouvert Ω
   $n = 2$
   $\overline{\Omega}$: polygonal
   $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{finie} K$, K triangle $\in T_h$
   $\overset{o}{K}_1 \cap \overset{o}{K}_2 = \varnothing$
   L'intersection de 2 triangles est soit vide, soit un sommet, soit une arête entière commune.
2. Un espace de fonctions V_h associé à T_h caractérisé par les restrictions aux triangles de la triangulation $P_K = \left\{ v_{|K} \ / \ v \in V_h \right\}$.
   Les P_K sont des espaces de polynômes à n variables
   (a) Calculs faciles
   (b) Méthode convergente

   Par exemple $P_1 = \{$polynômes de degré 1 sur $K\}$
   de la forme $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$
   $Dim P_1 = 3$
3. Base de V_h : fonctions à support "aussi petit" que possible

On donne à présent une condition suffisante "simple" pour que des fonctions définies par leurs restrictions aux triangles soient dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 63 *Si* $V_h \subset C^0(\overline{\Omega})$, *si* $\forall K \in T_h$, $P_K \subset H^1(\overset{o}{K})$,*alors* $V_h \subset H^1(\Omega)$

Autrement, si une fonction est continue sur Ω et "jusqu'à son bord", si elle est localement dans H^1 de chaque triangle, alors elle est globalement dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration

Soit $v \in V_h$

$$v \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow v \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall i, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

Comme $v \in C^0(\overline{\Omega})$, alors $v \in L^2(\Omega)$.

Démontrons à présent que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Soit $w_{iK} = \frac{\partial(v_{|K})}{\partial x_i}$. Alors $w_{iK} \in L^2(\overset{o}{K})$.

Soit $\varphi \in D(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} \int_K w_{ik}\varphi &= \int_K \frac{\partial(v_{|K})}{\partial x_i}\varphi \\ &= -\int_K v_{|K}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\partial K} v_{|K}\varphi\nu_{ik}d\Gamma_K \end{aligned}$$

D'autre part

$$\sum_K \int_K w_{ik}\varphi = -\sum_K \int_K v_{|K}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + 0$$

puisque soit le terme de bord est nul parce que l'on est sur un bord de Ω et φ y est nul, soit les termes de bord s'annulent 2 à 2, puisque chaque côté de triangle appartient exactement à 2 triangles, et là, les 2 normales sont opposées.

Mais :

$$\begin{aligned} -\sum_K \int_K v_{|K}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= -\int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= -(v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \\ &= (\frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi) \end{aligned}$$

et :

$$\sum_K \int_K w_{ik}\varphi = \int_\Omega (\sum_K w_{ik})\varphi$$

Soit $w_i = \sum_K w_{ik}$. Il est clair que $w_i \in L^2(\Omega)$. On a donc démontré que :

$$\int_\Omega w_i\varphi = (\frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi)$$

et donc $\frac{\partial v}{\partial x_i} = w_i \in L^2(\Omega)$

♦

9.2 Exemples d'éléments finis

9.2.1 Espaces de polynômes

Définition 64

$$P_k = \{p(x) = \sum_{|i|<k} a_i x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}\}$$

C'est l'ensemble des polynômes de degré inférieur à k.

Exemple 65 $n = 2$
P_1 : Combinaisons de 1, x_1 *et* x_2
P_2 : Combinaisons de 1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2 *et* x_2^2

Exemple 66 $n = 3$
$P1$: Combinaisons de 1, x_1, x_2 *et* x_3

Définition 67

$$Q_k = \{q(x) = \sum_{\substack{i_p < k \\ 1 < p < n}} a_{i_1} ... a_{i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}\}$$

C'est l'ensemble des polynômes de degré partiel inférieur à k.

Exemple 68 *Q_1 : Combinaisons de* 1, x_1, x_2 *et* x_1x_2
Q_2 : Combinaisons de 1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$*et* $x_1^2x_2^2$

Remarque 8 $P_k \subset Q_k \subset P_{nk}$

9.2.2 Rappels de géométrie

Théorème 69 *Trois points A, B, C de R^2 de coordonnées $A\binom{a_{11}}{a_{21}}, B\binom{a_{12}}{a_{22}}, C\binom{a_{13}}{a_{23}}$ forment un triangle propre si et seulement si* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Exercice 9.2.1 *Démontrez le résultat précédent*

Généralisation à $(n+1)$ points dans R^n. On a le

Théorème 70 *(et définition) $(n+1)$ points forment un simplexe propre si et seulement si* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Définition 71 *Le n simplexe de sommets (a_j) (c'est à dire $n+1$ points dont le déterminant précédent est non nul) est l'ensemble des points de R^n dont les coordonnées barycentriques sont dans $[0,1]$ (les coordonnées barycentriques d'un point M sont les coefficients de somme 1, tel que M soit le barycentre des $n+1$ points affectés de ces coefficients).*

Pour $x \in R^n$, $\lambda_i(x)$ coordonnées barycentriques de x sont définies par :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) \overrightarrow{xa_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) = 1$$

9.2.3 Eléments finis $\mathbf{P}_1$

Coordonnées barycentriques en dimension 2. Soit 3 points non alignés a_1, a_2, a_3 et $x(x_1, x_2)$
$\lambda_1(x)\overrightarrow{xa_1} + \lambda_2(x)\overrightarrow{xa_2} + \lambda_3(x)\overrightarrow{xa_3} = 0$
$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) = 1$
Soit

$$\begin{aligned}(a_{11} - x_1)\lambda_1(x) + (a_{12} - x_1)\lambda_2(x) + (a_{13} - x_1)\lambda_3(x) &= 0\\ (a_{21} - x_2)\lambda_1(x) + (a_{22} - x_2)\lambda_2(x) + (a_{23} - x_2)\lambda_3(x) &= 0\\ \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) &= 1\end{aligned}$$

système sont le déterminant est :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x_1 & a_{12} - x_1 & a_{13} - x_1 \\ a_{21} - x_2 & a_{22} - x_2 & a_{23} - x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

donc les $\lambda_i(x)$ existent uniques.
De plus $\lambda_i(x) \in P_1$
On a $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$
Tout ceci se généralise sans peine en dimension finie quelconque.

Théorème 72 *Soit $(a_j)_{j=1}^{n+1}$ simplexe propre, $(\alpha_j)_{j=1}^{n+1} \in R^{n+1}$. Alors il existe un unique $p \in P_1$ tel que $p(a_j) = \alpha_j$*

Démonstration
Soit

$$\begin{aligned}\Phi \quad : \quad & P_1 \to R^{n+1}\\ & p \to (p(a_1), p(a_2), ..., p(a_{n+1}))\end{aligned}$$

Alors Φ est linéaire. Soit :

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_j$$

alors $p \in P_1$ et $p(a_j) = \alpha_j$. Donc Φ est surjective. Comme la dimension de P_1 est égale à celle de R^{n+1}, cette application est bijective, d'où l'unicité.
♦

Définition 73 *Elément fini $(K, P_1, \sum_1(K))$ avec :*
K n simplexe (triangle, tétraèdre)
$P_1 \quad \forall p \in P_1 \quad p = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \ p(a_i)$
$\sum_1(K) = \{p(a_i) \ / \ 1 \leq i \leq n+1\}$ *ensemble des degrés de liberté*

L'espace dans lequel on va chercher la solution d'un problème variationnel est donc constitué de fonctions linéaires sur chaque triangle. Sur chaque triangle, chaque fonction est donc entièrement définie par ses valeurs aux sommets du triangle (degrés de liberté). "L'assemblage" de telles fonctions sur l'ensemble de triangles d'une triangulation est-il une fonction continue? La réponse est oui parce qu'il est clair

Démonstration

Si deux fonction linéaires coïncident en deux points alors

Second exemple :
Théorème : $Dim\ P_k(R^n) = C^k_{n+k}$
Si $\overset{o}{K} \neq \emptyset$ alors $Dim\ P_k(K) = C^k_{n+k}$
n simplexe de type 2
$P_2(K) \quad \sum_2(K) = \left\{p(a_i)_{i=1}^{n+1}\ /\ p(a_{ij}) \quad 1 \leq i < j \leq n+1\right\}$

$C^2_{2+2} = \frac{4\times 3}{1\times 2} = 6$
$C^2_{3+2} = \frac{5\times 4}{1\times 2} = 10$

Lemme : Un polynôme de degré ≤ 2 à n variables est défini de façon unique par ses valeurs $p(a_i)$ et $p(a_{ij})$
$P_2(K) \xrightarrow{\Phi} R^{Card \sum_2}$
$p \mapsto (p(a_i), p(a_{ij}))$
$Dim\ P_2 = Dim\ R^{Card \sum_2} = Card \sum_2$
Φ surjective ?
$\alpha_i \quad i = 1, n+1$
$\alpha_{ij} \quad 1 \leq i < j \leq n+1$ donnés
Soit $p = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(\lambda_i \left(2\lambda_i - 1\right)\right) + \sum\limits_{1<i<j<n+1} \alpha_{ij} \left(4\lambda_i\lambda_j\right)$
λ_i coordonnées barycentriques
$p \in P_2$ car $\lambda_i \in P$
$p(a_k) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i\lambda_i(a_k)\left(2\lambda_i(a_k) - 1\right) + \sum\limits_{1<i<j<n+1} \alpha_{ij} \underbrace{\left(4\lambda_i(a_k)\lambda_j(a_k)\right)}_{=0}$
$= \alpha_k\lambda_k(a_k)\left(2\lambda_k(a_k) - 1\right) = \alpha_k$
$p(a_{kl}) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i \underbrace{\lambda_i(a_{kl})\left(2\lambda_i(a_{kl}) - 1\right)}_{=0} + \sum\limits_{1<i<j<n+1} \alpha_{ij} \left(4\lambda_i(a_{kl})\lambda_j(a_{kl})\right)$
$= 4\alpha_{kl} \underbrace{\lambda_k(a_{kl})}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{\lambda_l(a_{kl})}_{=\frac{1}{2}} = \alpha_{kl}$

Théorème : Pour les deux exemples, les fonctions dont les restrictions sont des polynômes (P_1 ou P_2) qui sont définies par leurs valeurs aux degrés de liberté sont continues

Démonstration

Exemple d'élément fini rectangulaire.
$n = 2$
$\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in \mathcal{T}_h} K$
K rectangles à cotés parallèles aux axes
$\overset{o}{K}_1 \cap \overset{o}{K}_2 = \emptyset$
intersection = noeud ou arête complète

Autre espace de polynômes :

Rectangle de type 1
$P_K = Q_1(K)$
degré de liberté $\Sigma_k = \{p(a_i) \quad 1 \leq i \leq 4\}$

Rectangle de type 2
$P_K = Q_2(K)$
degré de liberté $\Sigma_k = \{p(a_i) \quad 1 \leq i \leq 9\}$