Université de Marne La Vallée. Maîtrise.
Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles
24 Mars 2000. T.Nkaoua

Soit Ω un ouvert polygonal à côtés parallèles aux axes des coordonnées d'un repère de R^2. On effectue une triangulation T_h de $\overline{\Omega}$ par des rectangles à côtés parallèles aux axes. On désigne par S l'ensemble des sommets de T_h. Soit $W = Q^3(R^2)$ l'espace vectoriel des polynômes à deux variables de degré partiel au plus 3 en chacune des variables x et y. On va définir un élément fini sur cette triangulation appelé rectangle de Bogner-Fox-Schmit dénommé BFS dans la suite. BFS est défini par sa restriction à chaque rectangle R qui est un polynôme de W, et par ses degrés de libertés $DL(p) = (p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i))_{i=1,4}$ où $(a_i)_{i=1,4}$ désignent les 4 sommets d'un rectangle R.

1. Déterminez la dimension de W et le nombre de degrés de liberté de BFS.
2. Soit R un rectangle de sommets $(a_i)_{i=1,4}$, et $p \in W$ nul sur l'ensemble des degrés de liberté associés à R.
   (a) Démontrez que p est nul sur les côtés verticaux de R.
   (b) Soit $q = \frac{\partial p}{\partial x}$. Démontrez que q est nul sur les côtés verticaux de R, puis que $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$ est nul sur les côtés verticaux de R.
   (c) Démontrez que p est nul sur toute segment horizontal inclus dans r. En déduire que p est nul.
3. Démontrez qu'il existe un unique polynôme de W prenant des valeurs données en ses degrés de liberté.
4. Soit $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) / \forall r \in T_h,\, v_{|r} \in W\}$. Démontrez qu'une fonction de X_h est entièrement déterminée par la donnée des degrés de libertés en chacun des sommets de la triangulation, c'est à dire que $\forall (s, Z) \in T_h \times R^{16}, \exists! v \in X_h,\, DL(v_{|s}) = Z$. Quelle est la dimension de X_h?
5. Démontrez que $X_h \subset C^1(\overline{\Omega})$ et que $X_h \subset H^2(\Omega)$.
6. Pour $(s, j) \in S \times [1, 16]$, soit $\varphi_{s,j} \in X_h$ valant 0 en tous les degrés de libertés des sommets de S différents de s, et valant 1 au *jème* degré de liberté associé à s. Démontrez que $(\varphi_{s,j})$ définit une base de X_h. Déterminez le support de $\varphi_{s,j}$.
   On rappelle les notations :
   $$\begin{aligned} \|v\|_2^2 &= \int_\Omega [v^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial xy})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})^2] \\ |v|_2^2 &= \int_\Omega [(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})^2] \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$
   On rappelle que $H_0^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ pour la norme $\|.\|_2$, que cette norme est équivalente à $|.|_2$ sur $H_0^2(\Omega)$ et que $H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) / v_{|\Gamma} = 0 \,\text{et}\, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\}$. On note $\|.\|_0$ la norme de $L^2(\Omega)$.
7. Démontrez que pour $u \in H_0^2(\Omega)$:
   $$\int_\Omega (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
   (on pourra commencer par démontrez le résultat pour des fonctions plus régulières) puis que $|u|_2 = \|\Delta u\|_0$.
8. Soit $f \in L^2(\Omega)$, démontrez qu'il existe un unique $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que:
   $$(P) \; : \forall v \in H_0^2(\Omega), \int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v$$
9. Démontrez que u est solution d'un problème aux limites (Equation aux Dérivées Partielles + conditions limites) que l'on précisera (on pourra poser $\Delta^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$). On admet qu'alors $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

10. Démontrez que si $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ est solution de ce problème aux limites alors est la solution du problème (P).

11. Soit $V_h = \{v \in X_h / v = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\} \subset H_0^2(\Omega)$ d'après les questions précédentes. Quelle est la dimension de V_h. Déterminer une base de V_h à partir de la base $(\varphi_{s,j})$ définie précédemment. On notera (ψ_j) cette base.

12. Ecrire (P_h) le problème approché de (P) dans V_h de solution u_h. On appelle ξ_j les coordonnées de u_h dans la base (ψ_j). Redémontrez rapidement que (ξ_j) est solution d'un système linéaire dont on précisera la matrice. Déterminez le nombre maximal de termes non nuls par ligne de la matrice.