Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles
Maîtrise de Mathématiques.
30 Mars 2001. T.Nkaoua

Soit Ω un ouvert polygonal à côtés parallèles aux axes des coordonnées de la base canonique de R^2 et Γ son bord. On rappelle les notations pour $v \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|v\|_2^2 &= \int_\Omega [v^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})^2] \\ |v|_2^2 &= \int_\Omega [(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})^2] \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

On rappelle que $H_0^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ pour la norme $\|.\|_2$, que cette norme est équivalente à $|.|_2$ sur $H_0^2(\Omega)$ et que $H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega)/v_{|\Gamma} = 0 \,\text{et}\, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\}$. On note $\|.\|_0$ la norme de $L^2(\Omega)$.

1. Démontrez que pour $u \in H_0^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

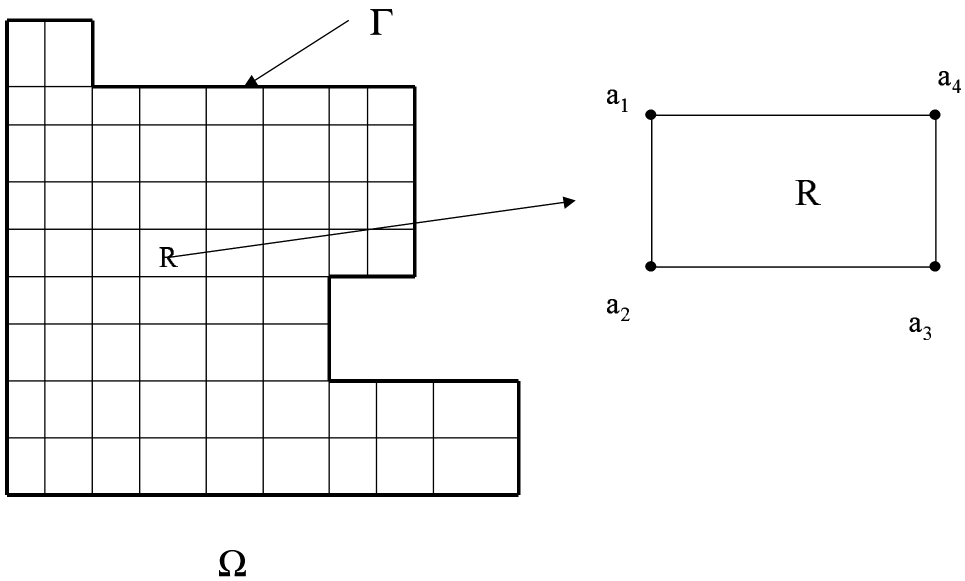
(on pourra commencer par démontrez le résultat pour des fonctions plus régulières), puis que $|u|_2 = \|\Delta u\|_0$.

2. Soit $f \in L^2(\Omega)$, démontrez qu'il existe un unique $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que:

$$(P) \ : \forall v \in H_0^2(\Omega), \int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v$$

3. Démontrez que u (la solution de (P)) est solution d'un problème aux limites (Equation aux Dérivées Partielles + conditions limites) que l'on précisera (on pourra poser $\Delta^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$). On admet qu'alors $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

4. Démontrez que si $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ est solution de ce problème aux limites alors est la solution du problème (P).



On effectue une triangulation T_h de $\overline{\Omega}$ par des rectangles à côtés parallèles aux axes. On désigne par S l'ensemble des sommets de T_h et σ le nombre de sommets. Soit $W = Q_3(R^2)$ l'espace vectoriel des polynômes à deux variables de degré partiel au plus 3 en chacune des variables x et y. On va définir un élément fini sur cette triangulation appelé rectangle de Bogner-Fox-Schmit dénommé BFS dans la suite. BFS est défini par sur chaque rectangle R par un polynôme de W, et par ses degrés de libertés sur le rectangle $DL(p) = (p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i))_{i=1,4}$ où $(a_i)_{i=1,4}$ désignent les 4 sommets d'un rectangle R.

5. Déterminez la dimension de W et précisez le nombre de degrés de liberté de BFS sur un rectangle.
6. Soit R un rectangle de sommets $(a_i)_{i=1,4}$, et $p \in W$ nul sur l'ensemble des degrés de liberté associés à R.
   (a) Démontrez que p est nul sur les côtés verticaux de R.
   (b) Soit $q = \frac{\partial p}{\partial x}$. Démontrez que q est nul sur les côtés verticaux de R, puis que $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}$ est nul sur les côtés verticaux de R.
   (c) Démontrez que p est nul sur toute segment horizontal inclus dans r. En déduire que p est nul.
7. Démontrez qu'il existe un unique polynôme de W prenant des valeurs données aux degrés de liberté d'un rectangle BFS.
8. Soit $X_h = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) / \forall R \in T_h,\ v_{|R} \in W\}$. Démontrez que $X_h \subset C^1(\overline{\Omega})$ et que $X_h \subset H^2(\Omega)$. Quelle est la dimension de X_h?
9. Pour $(s, j) \in S \times [1, 16]$, soit $\varphi_{s,j} \in X_h$ la base de X_h où $\varphi_{s,j}$ vaut 0 en tous les degrés de libertés des sommets de S différents de s, et valant 1 au $j\grave{e}me$ degré de liberté associé à s. Déterminez le support de $\varphi_{s,j}$. Soit $V_h = \{v \in X_h / v = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\} \subset H_0^2(\Omega)$ d'après les questions précédentes. Déterminer une base de V_h à partir de la base $(\varphi_{s,j})$ définie précédemment et déterminez la dimension de V_h. On notera (ψ_j) cette base.
10. Ecrire (P_h) le problème approché de (P) dans V_h de solution u_h. On appelle ξ_j les coordonnées de u_h dans la base (ψ_j). (ξ_j) est solution d'un système linéaire dont on précisera la forme de la matrice et des termes de la matrice (sans calculer les intégrales). Déterminez le nombre maximal de termes non nuls par ligne de cette matrice.