

ANALYSE NUMERIQUE
EXAMEN (3 Heures)

On considère le système linéaire $AX = b$, où A est une matrice **carrée, symétrique, définie positive**, et de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ B_1^t & B_2^t & A_3 \end{pmatrix}$$

où A_1 et A_2 sont des **matrices symétriques carrées à n lignes et n colonnes**, B_1 et B_2 sont des **matrices rectangulaires à n lignes et m colonnes** et A_3 une **matrice symétrique carrée à m lignes et m colonnes**. La matrice A comporte donc $2n + m$ lignes et colonnes. Les vecteurs X et b sont ainsi dans R^{2n+m} . On écrira alors X sous la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec x et y dans R^n et z dans R^m et de la même manière $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec α et β dans R^n et γ dans R^m . On notera $(.,.)$ le produit scalaire canonique indifféremment dans R^n , R^m ou R^{2n+m} . On peut

ainsi écrire pour $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $(X_1, X_2) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) + (z_1, z_2)$.

Ce système linéaire $AX = b$ peut s'interpréter comme la résolution d'un problème "physique" dans un domaine de R^2 ou de R^3 dont les inconnues ont été partagées en 3 groupes : les inconnues sur un premier sous domaine, les inconnues sur un deuxième sous domaine et les inconnues sur l'interface entre les 2 sous domaines. La matrice A_1 (respectivement A_2) représente les relations entre les inconnues du premier sous domaine (respectivement du deuxième sous domaine), la matrice A_3 représente les relations entre les inconnues d'interface, la matrice B_1 (respectivement B_2) représente les relations entre les inconnues du premier sous domaine (respectivement du deuxième sous domaine) et les inconnues d'interface. La symétrie de la matrice A provient de la symétrie "physique" des relations entre les inconnues. La matrice A_3 est dans la pratique beaucoup plus "petite" que les matrices A_1 et A_2 ($m \ll n$) qui sont elles mêmes plus petites que A .

L'objet de ce problème est d'étudier une méthode de résolution de $AX = b$ (système de taille $2n + m$) ne faisant intervenir que des résolutions de systèmes linéaires de taille n ou m , de plus cette méthode présentera un bon degré de parallélisme.

1. Vérifiez que A est symétrique et que le système $AX = b$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 z &= \alpha \\ A_2 y + B_2 z &= \beta \\ B_1^t x + B_2^t y + A_3 z &= \gamma \end{aligned}$$

2. En calculant (AX, X) pour des vecteurs X convenablement choisis, démontrez que A_1 , A_2 et A_3 sont définies positives.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la solution de $AX = b$. Démontrez en éliminant x et y du système que z est solution du système linéaire $Sz = q$ où :

$$S = A_3 - B_1^t A_1^{-1} B_1 - B_2^t A_2^{-1} B_2 \quad \text{et} \quad q = \gamma - B_1^t A_1^{-1} \alpha - B_2^t A_2^{-1} \beta$$

4. Démontrez que q peut s'obtenir grâce à la résolution de systèmes linéaires et de produits matrice-vecteur que l'on précisera (il est naturellement hors de question de calculer l'inverse de la moindre matrice..., et on ne précise pas pour le moment la méthode employée pour résoudre ces systèmes linéaires).

5. Dans le calcul de q , quelles sont les opérations que l'on peut effectuer "en parallèle" sur 2 processeurs? Si chacun des processeurs a sa propre mémoire, comment faut-il distribuer les données (matrices et inconnues) entre les processeurs pour que ces opérations parallèles puissent s'effectuer sans aucune "communication" entre les 2 mémoires? Dans ce cas, quelles communications entre les deux mémoires seront quand même nécessaires pour mener à bien le calcul de q ?
6. En supposant que l'on a pu résoudre le système linéaire $Sz = q$, démontrez que x et y peuvent s'obtenir chacun grâce à la résolution d'un système linéaire et d'un produit matrice-vecteur que l'on précisera. Le calcul de x et y peut-il se faire en parallèle?

7. En calculant (AX, X) pour des vecteurs X de la forme $\begin{pmatrix} -A_1^{-1}B_1z \\ -A_2^{-1}B_2z \\ z \end{pmatrix}$, démontrez que :

$$\forall z \in R^m, z \neq 0, (A_3z, z) - (A_1^{-1}B_1z, B_1z) - (A_2^{-1}B_2z, B_2z) > 0$$

8. Démontrez que S est symétrique définie positive.
9. Démontrez que $\forall z \in R^m, (Sz, z) \leq (A_3z, z)$. En déduire que le rayon spectral de S , $\rho(S)$ est inférieur à $\rho(A)$.
10. En se servant de vecteurs de la forme décrite en question 7, démontrez que la plus petite valeur propre de A est inférieure à la plus petite valeur propre de S : $\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\min}(S)$
11. Démontrez que : $cond_2(S) \leq cond_2(A)$.
On va à présent étudier la résolution de $Sz = q$ par la méthode de descente à pas fixe (toujours sans calculer d'inverses de matrices malgré les apparences...).
12. Ecrire la méthode de descente à pas fixe pour la résolution de $Sz = q$ (en notant z^k le k-ième itéré de la méthode). A quelle condition cette méthode converge-t-elle ?
13. Démontrez que l'on peut obtenir z^{k+1} à partir de z^k grâce à la résolution de systèmes linéaires et de produits matrice-vecteur que l'on précisera. Quels calculs peuvent se faire en parallèle sur 2 processeurs?
14. Décrire l'algorithme complet de résolution de $AX = b$ obtenu à partir des questions précédentes (calcul de q , résolution de $Sz = q$, calcul de x et y), en précisant les parties parallèles (sur 2 processeurs) de l'algorithme.
15. Quels sont les choix de méthodes de résolution pour la résolution des systèmes linéaires de matrice A_1 ou A_2 intervenant dans l'algorithme ? Avez vous une préférence et pourquoi ? Quels sont les points faibles de votre choix ?
16. En vous inspirant des commentaires d'introduction, imaginez une autre écriture du problème et de la matrice A qui permette de généraliser la méthode de résolution de $AX = b$ à une parallélisation sur 3 processeurs; sur P processeurs.