Examen. 16 Décembre 1998 (3 Heures)

Question de cours (5 points)
Soit $A = M - N$ symétrique définie positive, avec M inversible. Démontrez que $B = M^t + N$ est symétrique et que si B est définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Exercice (5 points)
On considère le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Calculez la solution de ce système linéaire par la méthode de Gauss. Calculez les deux premières itérations de la méthode de Jacobi en partant de $u^0 = 0$, ainsi que les deux premières itérations de la méthode de Gauss Seidel en partant de $u^0 = 0$.

Problème (10 points)
On étudie dans ce problème “la méthode des directions alternées” pour la résolution de $Ax = b$ où A est symétrique définie positive d'ordre n. On suppose $A = C + D$ avec C et D symétriques définies positives. a est un réel strictement positif. I désigne l'identité d'ordre n. On suppose que les systèmes linéaires de matrice $aI + C$ ou $aI + D$ sont “faciles” à résoudre.

1. Démontrez que 2 matrices carrées diagonalisables M et N qui ont mêmes vecteurs propres commutent ($MN = NM$).
2. Démontrez que si U est symétrique définie positive, alors $aI + U$ est symétrique définie positive et donc inversible.
3. Démontrez que si U est symétrique définie positive, alors $B = (aI - U)(aI + U)^{-1}$ est symétrique et $\rho(B) < 1$.
4. Soit z_k et y_k les deux suites définies par la donnée de y_0 et les relations :

$$\begin{aligned} z_k &= (aI + C)^{-1}[(aI - D)y_k + b] \\ y_{k+1} &= (aI + D)^{-1}[(aI - C)z_k + b] \end{aligned}$$

   Justifiez l'existence des deux suites.
5. Expliquez comment on implante le calcul de ces deux suites sur ordinateur et les types de calcul qu'on y effectue.
6. Démontrez que y_{k+1} s'écrit sous la forme $y_{k+1} = Ey_k + c$ où E est une matrice que l'on précisera et c un vecteur à préciser. Démontrez que E est semblable à $(aI - C)(aI + C)^{-1}(aI - D)(aI + D)^{-1}$.
7. Démontrez que y_k converge vers un vecteur noté y. Démontrez que z_k converge vers un vecteur noté z.
8. Démontrez que $y = z$ et que y est la solution de $Ax = b$