Maîtrise mathématiques. TD. Introduction à l'Analyse Numérique des équations aux Dérivées Partielles.

Thierry Nkaoua 1999-2000

1. Soit f linéaire de R^n dans R . Démontrez de manière très élémentaire qu'il existe un unique a dans R^n tel que $\forall x \in R^n, f(x) = a.x$ où . désigne le produit scalaire canonique de R^n.

2. *Rappels.* Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. On dit que f est différentiable en a ssi il existe u linéaire continue de E dans F telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} = 0$$

On peut démontrer que si u existe alors u est unique. On la note $df(a)$ ou df_a.

   (a) Démontrez que si f est linéaire continue alors f est différentiable partout.

   (b) Démontrez que si f est différentiable en a alors f est continue en a.

   (c) On dit que f est dérivable en a suivant $x \neq 0$ ssi la fonction $\Phi_x : \varepsilon \mapsto f(a + \varepsilon x)$ est dérivable en 0. Démontrez que si f est différentiable en a, elle admet des dérivées suivant tout $x \neq 0$. Faire le lien entre $df(a).x$ et Φ_x.

   (d) Si $E = R^n$ et $F = R^m$ et f différentiable en a, expliciter la matrice de df_a dans les bases canoniques de R^n et R^m.

   (e) Dans le cas où E est un Hilbert et $F = R$, expliquez le lien entre df_a et le "vecteur gradient" $\nabla f(a)$.

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit J de R^n dans R définie par $J(v) = Av.v$. Démontrez que J est différentiable et calculez $\nabla J(v)$.

4. Soit J de R^n dans R définie par $J(v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j$. Démontrez que J est différentiable et calculez $\nabla J(v)$.

5. Dans $L^2(0,1)$ muni de la norme $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x)dx$, on considère les applications

$$J(v) = \int_0^1 v^2(x)dx \text{ et } K(v) = \int_0^1 xv^2(x)dx$$

Démontrez que J et K sont différentiables et calculez leur gradient.

6. Dans $L^2(R)$, u étant fixé dans $L^2(R)$, on considère l'application :

$$J(v) = \int \frac{1}{x^2+1}(v^2(x) + u(x)v(x))dx$$

   (a) Démontrez que J est bien définie.

   (b) Démontrez que J est différentiable sur $L^2(R)$ et calculez son gradient.

7. Dans R^2 on considère la forme bilinéaire symétrique a et la forme linéaire f définies par :

$$a(u,v) = 2u_1v_1 + 5u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1$$
$$f(v) = 2v_1 + v_2$$

pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans R^2.

   (a) Vérifiez que $a(v,v) = (v_1 + 2v_2)^2 + (v_1 - v_2)^2$ et que a est définie positive. On rappelle que $\sqrt{a(v,v)}$ définit alors une norme sur R^2, en déduire que a est elliptique.

(b) Démontrez que le problème de minimisation de $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v)$ sur R^2 a une solution unique notée u. Ecrire la formulation variationnelle associée. En écrivant cette formulation variationnelle pour 2 vecteurs v convenablement choisis, trouver la solution u.

8. Soit $J(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - x - y - z$ définie sur R^3. Soit $U = \{(x,y,z) \in R^3 / x+y+z = 0\}$

   (a) Démontrez que l'on peut utiliser le théorème de Lax Milgram pour démontrer que J admet un unique minimum sur R^3 en un point noté (α,β,γ) et un minimum unique sur U en un point noté (a,b,c).

   (b) Démontrez que (α,β,γ) est solution d'un problème variationnel que l'on précisera. Démontrez que (a,b,c) est solution d'un problème variationnel que l'on précisera.

   (c) Calculez (α,β,γ) à partir de son problème variationnel. En déduire (a,b,c) par des arguments géométriques. Retrouvez (a,b,c) par son problème variationnel.

9. Soit $E = H^1(0,1) = \{f \in C^0(0,1)/f$ dérivable et $f' \in L^2(0,1)\}$.

   (a) Démontrez que E est un espace vectoriel.

   (b) Soit a de E^2 dans R définie par :

   $$a(u,v) = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v'$$

   Démontrez que a est bilinéaire, symétrique définie positive. On munit E de la norme ainsi définie. On admet que E est un Hilbert.

   (c) Soit $J(v) = \int_0^1 v'^2$. Démontrez que J est différentiable et calculez son gradient.

10. Soit U un ouvert de R^n et J différentiable de U dans R.

    (a) Démontrez que si J admet un minimum relatif en u, alors $\nabla J(u) = 0$. Démontrez que la réciproque n'est pas vraie.

    (b) On rappelle que la différentielle seconde de J en u si elle existe est la différentielle de l'application de R^n dans R^n $v \mapsto \nabla J(v)$. La différentielle seconde est donc une application linéaire de R^n dans R^n. On rappelle la formule de Taylor à l'ordre 2 :

    $$J(u+h) = J(u) + \nabla J(u).h + \frac{1}{2}h^t.J''(u)h + \|h\|^2\varepsilon(h)$$

    On identifie $J''(u)$ avec sa matrice dans la base canonique de R^n. Démontrez que $J''(u)$ est symétrique.

    (c) Démontrez que si u est un minimum relatif de J, alors J'' est positive.

    (d) Démontrez que si $\nabla J(u) = 0$ et $J''(u)$ est définie positive, alors u est un minimum strict de J.

    (e) Etudier les extrema de la fonction de R^2 dans R^2 $f(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$.

11. Soit f une fonction de R dans R admettant une dérivée continue et bornée sauf éventuellement en n points x_i $(x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$. On note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ respectivement les limites à droite et à gauche de f en x, et δ_x la masse de Dirac en x.

    (a) Démontrez que $f \in D'(R)$

    (b) Calculez f'.

12. Soit Ω un ouvert de R^n, x_n une suite convergente de points de Ω. Soit δ_{x_n} la suite des masses de Dirac aux points x_n. Etudiez la convergence au sens des distributions de la suite δ_{x_n}.

13. Soit χ la fonction caractéristique de $[0,1]$ c'est à dire $\chi(x) = 1$ si $x \in [0,1]$, $\chi(x) = 0$ sinon. Soit f définie sur R par $f(x) = x\chi(x)$. On note δ_x la ditribution de $D'(\Omega)$ définie par $(\delta_x, \varphi) = \varphi(x)$ ($\varphi \in D(R)$ ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur R), et δ'_x sa dérivée.

(a) Démontrez que $f \in D'(\Omega)$

(b) Calculez f' et f".

14. On se propose de démontrer qu'une distribution T de $D'(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si il existe une constante $K \in R$ telle que $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $|T(\varphi)| \leq K\|\varphi\|_0$ et comme conséquence que $\delta_0 \notin L^2(R)$.
Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère $D(\Omega)$ en tant que sous espace de $L^2(\Omega)$ (on le munit donc de la norme de $L^2(\Omega)$).

(a) Démontrez que l'application :

$$F \quad : \quad \begin{array}{l} D(\Omega) \rightarrow R \\ \varphi \longmapsto T_f(\varphi) \end{array}$$

est linéaire continue sur $D(\Omega)$ et qu'il existe donc $K \in R$ tel que $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $|T_f(\varphi)| \leq K\|\varphi\|_0$.

(b) Réciproquement, soit $T \in D'(\Omega)$ une distribution telle qu'il existe $K \in R$ tel que $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $|T(\varphi)| \leq K\|\varphi\|_0$. Démontrez que T se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$ encore notée T. En déduire qu'il existe une fonction $f \in L^2(\Omega)$ telle que $T = T_f$, c'est à dire que $T \in L^2(\Omega)$.

(c) On admet qu'il existe une fonction ψ de $D(R)$ positive non nulle dont le support est $[-1, 1]$ et telle que $\psi(0) = 1$. (Un exemple d'une telle fonction est donné plus loin en "question subsidiaire"). On pose pour $\varepsilon > 0$, $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\frac{x}{\varepsilon})$.
Représentez graphiquement l'allure de ψ et des ψ_ε. Démontrez que $\psi_\varepsilon \in D(\Omega)$, que $\psi_\varepsilon(0) = 1$ et que le support de ψ_ε est $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Démontrez que

$$\int_R (\psi_\varepsilon(x))^2\, dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\psi_\varepsilon(x))^2\, dx = \varepsilon \int_{-1}^{1} (\psi(u))^2\, du$$

Soit δ_0 la masse de Dirac en 0. Démontrez qu'il ne peut pas exister de constante K telle que pout tout $\varepsilon > 0$:

$$< \delta_0, \psi_\varepsilon > \leq K\|\psi_\varepsilon\|_0$$

En déduire que $\delta_0 \notin L^2(R)$.

15. I désignant un intervalle ouvert de R, on se propose de déterminer les distributions $T \in D'(I)$ telles que $T' = 0$.
Soit ψ_0 fixée dans $D(I)$ telle que $\int \psi_0 = 1$. Soit $\varphi \in D(I)$. On pose $\alpha = \int \varphi$. Soit $[a, b] \subset I$ tel que les supports de φ et de ψ_0 soient inclus dans $[a, b]$ (cela signifie que φ et ψ_0 sont nulles en dehors de $[a, b]$). On définit F sur I par :

$$F(x) = \int_a^x (\varphi - \alpha\psi_0)$$

(a) Démontrez que F est de classe C^∞.

(b) Démontrez que $F(x) = 0$ pour $x \leq a$

(c) Démontrez que pour $x \geq b$ $F(x) = 0$ en montrant que chacune des 2 intégrales de l'égalité suivante est nulle :

$$F(x) = \int_a^b (\varphi - \alpha\psi_0) + \int_b^x (\varphi - \alpha\psi_0)$$

En déduire que $F \in D(I)$.

(d) Démontrez que $\varphi = \alpha\psi_0 + F'$

(e) Soit $T \in D(\Omega)$ telle que $T' = 0$. Démontrez en évaluant $< T, \varphi >$ grâce à l'expression précédente de φ, que T est une fonction constante que l'on précisera.

(f) Soit $\psi(x) = e^{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right)}$ pour $x \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ $\psi(0) = 1$ et $\psi(x) = 0$ sinon. Démontrez que ψ répond aux propriétés de ψ_0.

16. Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière régulière. Soit $g \in C^1(\overline{\Omega})$ fixée. Soit A l'application définie sur $L^2(\Omega)$ par :

$$\forall u \in L^2(\Omega),\ Au(x) = g(x)u(x)$$

$\|\ \|_\infty$ désigne la norme de $L^\infty(\Omega)$, $\|\ \|_0$ désigne la norme de $L^2(\Omega)$, $\|\ \|_1$ désigne la norme de $H^1(\Omega)$ et $|\ |_1$ désigne la semi norme de $H^1(\Omega)$.

(a) Démontrez que $Au \in L^2(\Omega)$, que A est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

(b) Pour $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, démontrez que :

$$\|\frac{\partial(Av)}{\partial x_i}\|_0 \le \|\frac{\partial g}{\partial x_i}\|_\infty \|v\|_0 + \|g\|_\infty \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_0$$

puis que :

$$|Av|_1 \le \sqrt{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial g}{\partial x_i}\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}} \|v\|_1$$

(c) Démontrez que B, la restriction de A à $C^\infty(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|\ \|_1$, est continue de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$.

(d) Démontrez que B se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

(e) Démontrez que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $Bv(x) = g(x)v(x)$ presque partout.

17. Soit J définie sur U partie convexe de R^n.

(a) Démontrez que si J est différentiable en u et admet un minimum en u alors :

$$\forall v \in U,\ J'(u).(v-u) \ge 0$$

(b) On dit que J est convexe ssi :

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0,1], J(tx + (1-t)y) \le tJ(x) + (1-t)J(y)$$

Démontrez que si J est différentiable sur U, J est convexe ssi :

$$\forall u, v \in U,\ J(v) \ge J(u) + J'(u)(v-u)$$

On admet le résultat "strictement convexe" ssi ">".

(c) Démontrez que si J est deux fois différentiable sur U, J est convexe ssi :

$$\forall u, v \in U,\ (v-u)^t J''(u)(v-u) \ge 0$$

On admet le résultat "strictement convexe" ssi ">".

(d) Démontrez que si J est convexe, tout minimum relatif est un minimum absolu. Démontrez que si J est strictement convexe elle admet au plus un minimum et c'est alors un minimum strict.

(e) Démontrez que si J est convexe, différentiable en u, J admet un minimum en u ssi $\forall v \in U,\ J'(u)(v-u) \ge 0$ et que si U est ouvert cette condition est équivalente à $J'(u) = 0$.

18. Soit $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_n = 1$, une subdivision régulière de $[0,1]$. Soit

$$V_n = \left\{v \in C^0(0,1) / v(0) = v(1) = 0,\ \text{et } \forall i \in [0, n-1], v_{|[x_i, x_{i+1}]} \text{ linéaire}\right\}$$

(a) Démontrez que V_n est un sous espace vectoriel de $C^O(0,1)$. Démontrez que tout $u \in V_n$ est dérivable presque partout et que $\nabla u \in L^2(0,1)$. On munit V_n de la norme $\|v\|^2 = \int_0^1 v^2 + \int_0^1 v'^2$.

(b) Pour $1 \le i \le n-1$, soit e_i la fonction de V_n définie par $e_i(x_j) = \delta_{ij}$. Explicitez les valeurs de e_i sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, représentez graphiquement e_i et démontrez que (e_i) est un système libre de V_n.

(c) Pour $u \in V_n$, on pose $u_i = u(x_i)$. Démontrez que $u = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i$. En déduire que (e_i) est un système générateur de V_n, que V_n est de dimension finie $n-1$.

(d) Soit f dans V_n. Soit J définie sur V_n par $J_n(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\nabla u)^2 - \int_0^1 fu$. Démontrez que J_n est strictement convexe. En déduire que J_n admet un minimum strict unique en un point noté u^n tel que $\forall v \in V_n$, $\int_0^1 \nabla u^n \nabla v = \int_0^1 fv$, ou encore $\forall i \in [1, n-1]$, $\int_0^1 \nabla u^n \nabla e_i = \int_0^1 fe_i$.

(e) Calculez pour $i, j \in [1, n-1]$, $\int_0^1 \nabla e_i \nabla e_j$ et $\int_0^1 e_i e_j$. Démontrez que la recherche de u^n est équivalente à la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ pour lequel on explicitera la matrice A et le vecteur b.

(f) Faire le lien avec la résolution de l'équation aux dérivées partielles $-\Delta u = f$, $u(0) = u(1) = 0$ et sa formulation variationnelle. Expliquer la "philosophie" de résolution numérique.

19. Soit u de $[a, b]$ dans R. On pose $D_x^+ u(h) = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$, $D_x^- u(h) = \dfrac{u(x) - u(x-h)}{h}$, $D_x u(h) = \dfrac{u(x+h) - u(x-}{2h}$

(a) Démontrez que si u est de classe C^2, alors $u'(x) = D_x^+ u(h) + O(h) = D_x^- u(h) + O(h)$.

(b) Démontrez que si u est de classe C^3, alors $u'(x) = D_x u(h) + O(h^2)$

(c) Démontrez que si u est de classe C^6, alors $\exists \alpha, \beta \; u'(x) = \alpha D_x u(h) + \beta D_x u(2h) + O(h^4)$

(d) Démontrez que si u est de classe C^2, alors $u''(x) = [D_x^+(h) - D_x^-(h)]/h + O(h^2)$

(e) On cherche à résoudre $-u'' = f$ sur $[0, 1]$ et $u(0) = u(1) = 0$. On appelle u_i une valeur approchée de u au point $x_i = \frac{i}{n}$ de $[0, 1]$. On utilise la formule de différences finies précédente. Ecrire le système linéaire dont est solution (u_i). Commentaires.

(f) On cherche à résoudre à présent $-\Delta u = f$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$ et $u = 0$ sur $\partial([0, 1] \times [0, 1])$. On découpe $[0, 1] \times [0, 1]$ en n^2 sous-carrés réguliers que l'on numérote "gauche-droite, bas-haut" de 1 à n^2. On appelle u_i la valeur approchée de u au milieu du i-ème carré. En utilisant la même formule de différence finie que précédemment, écrire le système linéaire dont est solution (u_i).

20. Soit u de classe C^3 sur $[0, L]$.

(a) Démontrez que les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(G)} & (-3u(x) + 4(u(x+h) - u(x+2h))/2h \\ \text{(M)} & (u(x+h) - u(x-h))/2h \\ \text{(D)} & (3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h))/2h \end{array}$$

sont de "bonnes" (préciser ce qualitatif) approximations de u.
On se propose de résoudre numériquement le problème (1) :

$$\begin{array}{ll} (1.a) & -u'' + qu = f \\ (1.b) & u'(0) = \alpha \\ (1.c) & u'(L) = \beta \end{array}$$

où f et q sont des fonctions continues données, et $q \geq 0$.

(b) Démontrez que si $q = 0$, il n'y a pas unicité à (1).

(c) Démontrez que si $q \neq 0$, il y a unicité à (1).

(d) Démontrez qu'il existe une condition nécessaire d'existence de u portant sur f, α et β.

(e) Ecrire le système linéaire de résolution du problème [1] par différences finies en utilisant (G) et (D) pour (1.b) et (1.c). Quelles sont les propriétés (bonnes ou mauvaises) de ce système ?

(f) On introduit un point fictif en $x = -h$ et $x = L + h$. Cela permet d'utiliser la formule (M). Ecrire le nouveau système obtenu et comparer ses propriétés avec le système précédent (éliminer les inconnues fictives).

(g) Dans le cas $q = 0$, le résultat de la discrétisation est-il cohérent avec les résultats de la question 2 ?

(h) Extension à la dimension 2. Ecrire le système linéaire obtenu par différences finies pour le problème :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,y) \text{ sur } [0,L]\times[0,L] \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ pour } x=0 \text{ et } x=L \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ pour } y=0 \text{ et } y=L \end{aligned}$$

Quelles propriétés retrouve-t-on ?

21. Soit Ω un ouvert de R^2 de frontière Γ "suffisamment régulière" telle que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et Γ_0 et Γ_1 mesurables. Soit $V = \{v \in H^1(\Omega)/Tr(v)_{|\Gamma_0} = 0\}$ muni de la norme $\|.\|_1$. Soit a définie sur $V\times V$ par $a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + buv)$ avec $b \in L^\infty(\Omega)$ et telle que $\exists\beta > 0$ tel que $b \geq \beta$ presque partout sur Ω. On admet que a est bilinéaire symétrique. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

 (a) Démontrez que V muni du produit scalaire définissant $\|.\|_1$ est un espace de Hilbert.
 (b) Démontrez que a est continue.
 (c) Démontrez que a est elliptique. En déduire que le problème variationnel :

 $$\text{trouvez } u \in V \text{ tel que: } \forall v \in V,\ a(u,v) = \int_\Omega fv$$

 admet une solution unique. On note u cette solution.
 (d) Démontrez que u vérifie $-\Delta u + bu = f$ presque partout dans Ω.
 (e) En admettant que $u \in H^2(\Omega)$, trouvez les conditions limites sur u (c'est à dire, les équations vérifiées par u sur Γ)
 (f) Soit $w \in H^2(\Omega)$ vérifiant $-\Delta w + bw = f$ presque partout dans Ω et vérifiant aussi les conditions limites précédemment trouvées, démontrez que w est solution du problème variationnel précédent.

22. Soit J de R^n (muni de sa norme euclidienne) dans R différentiable et elliptique, c'est à dire :

$$\exists\alpha > 0, \forall u,v \in R^n, (\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u) \geq \alpha\|v-u\|^2$$

 (a) Démontrez que J vérifie :

 $$\forall u,v \in R^n, J(v) - J(u) \geq (\nabla J(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2$$

 (b) Démontrez que J est strictement convexe et que $J(u)$ tend vers $+\infty$ quand $\|u\|$ tend vers $+\infty$.
 (c) Soit U une partie convexe fermée de R^n. Démontrez que le problème : trouver $u \in U$ tel que $J(u) = \min_{v\in U} J(v)$ admet une solution unique.
 Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive. Soit $\varphi \in C^0(R,R)$ croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et $\Phi(x) = \int_0^x \varphi$. Pour toute fonction f de R dans R, pour $x \in R^n$, on note $f(x)$ le vecteur de composantes $f(x_i)$. Soit $a = (1,1,...,1)$, $b \in R^n$ et J la fonctionnelle de R^n dans R définie par :

 $$J(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (\Phi(x),a) - (b,x)$$

 (d) Démontrez que J est différentiable et elliptique. En déduire que le problème : trouver $x \in R^n$ tel que :

 $$J(x) = \min_{y\in R^n} J(y)$$

 admet une solution unique qui est aussi solution de l'équation :

 $$(\mathrm{E}_0)\ Ax + \varphi(x) = b$$

 (e) Démontrez que l'application Ψ de R^n dans R^n qui à b associe x solution de (E_0) est lipchitzienne ($\exists C$ $\forall b_1, b_2 \in R$ $\|\Psi(b_1) - \Psi(b_2)\| \leq \|b_1 - b_2\|$)

(f) Démontrez que si de plus φ est de classe C^k, alors Ψ est aussi de classe C^k (on pourra penser à utiliser le théorème des fonctions implicites).
Soit B une matrice d'ordre (n, m). A présent on fixe b dans R^n, et à $v \in R^m$, on associe $y(v)$ dans R^n comme étant la solution de :

$$(\mathrm{E}_B) \; Ay + \varphi(y) = b + Bv$$

(g) Démontrez que $v \to y(v)$ est lipschitzienne de R^m dans R^n.

(h) Soit y_d fixé dans R^n et S une matrice carrée d'ordre m symétrique définie positive. Soit J de R^m dans R définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - y(d)\|^2 + \frac{1}{2}(Sv, v)$$

(i) Démontrez que $J(v)$ tend vers $+\infty$ quand $\|v\|$ tend vers $+\infty$ et que J admet au moins un minimum sur toute partie fermée de R^m.

(j) On suppose φ de classe C^1. Démontrez que J est différentiable et que son gradient est défini par :

$$\nabla J(v) = B^t p + Sv$$

où p est la solution du système linéaire :

$$[A + diag(\varphi'(y(v))]p = y(v) - y_d$$

23. Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière suffisamment régulière. On note $|.|_1$ la semi norme et $\|.\|_1$ la norme de $H^1(\Omega)$:

$$|v|_1^2 = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\right] \qquad \|v\|_1^2 = \int_\Omega \left[v^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\right]$$

Soit $u_0 \in H^1(\Omega)$. Pour $w \in H_0^1(\Omega)$, on pose $J(w) = |u_0 + w|_1^2$. On considère le problème (P) :

$$\text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que : } J(v) = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w)$$

(a) Démontrez que $J(w)$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{2}a(w, w) - l(w) + b$ avec a bilinéaire et l linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ et b constante.

(b) Démontrez que (P) a une solution unique notée v.

(c) Démontrez que (P) est équivalent à un problème variationnel que l'on précisera.

(d) On pose $u = u_0 + v$. Démontrez que u est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

24. Soit $\Omega =]0, 1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $V = \{v \in H^1(\Omega)/v(0) = v(1)\}$. On considère le problème (P) :

$$\text{Trouver } u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } \Omega \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

(a) Démontrez que la définition de V a bien un sens et que V est un sous espace complet de $H^1(\Omega)$.

(b) Déterminez un problème variationnel (PV) dans V vérifiant :
- toute solution de (P) est solution de (PV)
- (PV) admet une unique solution
- Si la solution de (PV) est suffisamment régulière, alors elle est aussi solution de (P).
On note u la solution de (PV).

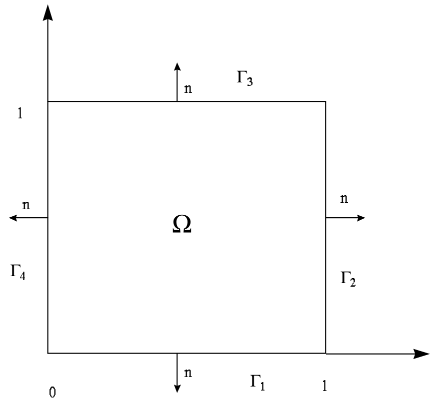
(c) Démontrez que si $f \in H^1(\Omega)$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et u est solution de (P) au sens "usuel".

(d) Etendre au problème (P) les éléments finis P_1 vus en cours pour le problème:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

En particulier, précisez l'espace d'approximation V_h et en donnez une base. Que remarque-t-on sur la solution approchée u_h par rapport au problème (P)?

25. On considère l'ouvert $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ de R^2 et on note (x,y) le point courant de R^2. On note la frontière de Ω $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ comme indiqué sur le graphique ci dessous. On note n la normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.



Le but de ce problème est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites (E):

$$(E) \begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}$$

puis d'étudier une méthode d'éléments finis adaptée.
On désigne par $D(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^∞ à support compact dans Ω et

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$$

les dérivées étant prises au sens des distributions. On note $H_0^1 = \overline{D(\Omega)}$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme

$$\|v\|_1 = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[|v|_0^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|_0^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

qui fait de $H^1(\Omega)$ un espace de Hilbert. On a noté $|v|_0$ la norme de v dans $L^2(\Omega)$. On rappelle les formules de Green :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega): \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} + \int_\Gamma u v n_x d\Gamma$$
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y} v = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial y} + \int_\Gamma u v n_y d\Gamma$$

où $n_x$et n_y sont respectivement la première et la deuxième coordonnée de la normale à Γ.

(a) Soit $v \in D(\Omega)$. En remarquant que $v(x,y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,t)dt$, démontrez que :

$$\forall (x,y) \in \Omega, \ (v(x,y))^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\right)^2 dt$$

puis que :

$$\int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

Démontrez que l'inégalité précédente reste vraie pour $v \in H_0^1(\Omega)$.
On obtient naturellement de manière analogue pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Quel théorème retrouve-t-on à partir de ces deux inégalités?

(b) Soit :

$$X = \{v \in H^1(\Omega) / \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \in L^2(\Omega)\}$$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ étant pris au sens des distribution. On considère la norme :

$$\|v\|_X = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\|v\|_1^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_0^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Démontrez que X est complet pour cette norme.
Dans toute la suite on munit X de cette norme $\|\bullet\|_X$.

(c) Soit $V = \overline{D(\Omega)}^X$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans X pour la norme $\|\bullet\|_X$. Démontrez que :

$$\forall v \in V, \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \leq \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2$$

(d) Soit $f \in L^2(\Omega)$. Démontrez que la forme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & R \\ v & \longmapsto & \int_\Omega fv \end{array}$$

est continue.

(e) Démontrez que le problème (P) : trouver $u \in V$ tel que

$$\forall v \in V \ : \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \int_\Omega fv$$

admet une solution unique.

(f) Démontrez que la solution u du problème (P) vérifie au sens des distributions :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f$$

(g) Démontrez que $V \subset H_0^1(\Omega)$ et que donc $\forall v \in V$, $v|_\Gamma = 0$.

(h) On suppose que la solution $u \in V \cap H^4(\Omega)$ et on admet que l'on peut définir $\frac{\partial v}{\partial y}$ sur Γ pour les fonctions v de V. Démontrez qu'alors pour tout v de V, on peut écrire :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \int_\Omega \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \int_{\Gamma 3} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

On admet que :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) / v_{|\Gamma} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0\}$$

En déduire que u solution du problème (P) est bien solution du problème aux limites (E).
On va à présent définir un élément fini adapté à la résolution du problème P. On considère l'espace W des polynômes de la forme :

$$p(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \beta_0 x + \beta_1 xy + \beta_2 xy^2 + \beta_3 xy^3$$

Soit K un rectangle de sommets (a_1, a_2, a_3, a_4) aux côtés parallèles aux axes de coordonnées ((a_1, a_2) et (a_3, a_4) étant parallèles à l'axe des x). Soit $p \in W$ tel que :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 4,\ p(a_i) = \frac{\partial p}{\partial y}(a_i) = 0$$

(i) Démontrez que p est nul sur $[a_1, a_4]$ et $[a_2, a_3]$,puis que p est nul sur tout segment horizontal à l'intérieur de K. En déduire que p est nul.

(j) Soit α_i et β_i, $1 \leq i \leq 4$ des réels. Démontrez qu'il existe un unique polynôme $p \in W$ tel que :

$$\text{pour } 1 \leq i \leq 4,\ p(a_i) = \alpha_i \text{ et } \frac{\partial p}{\partial y}(a_i) = \beta_i$$

On note $\Sigma_K = \left\{ p(a_i), \dfrac{\partial p}{\partial y}(a_i) \right\}$ les degrés de liberté ainsi définis.

(k) Soit K_1 et K_2 deux rectangles à côtés parallèles aux axes partageant une arête verticale $[a, b]$. Soit $p_1$et $p_2 \in W$ définis respectivement sur K_1et K_2 dont les degrés de liberté communs coïncident. Démontrez que $p_1$et p_2 coïncident sur $[a, b]$ tout en entier de même que $\dfrac{\partial p_1}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial p_2}{\partial y}$. Démontrez les mêmes résultats si l'arête commune est horizontale.

(l) Soit T_h une triangulation de Ω à l'aide de rectangles à côtés parallèles aux axes. Démontrez le "théorème" vu en cours :

$$\text{Si } v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ et } \forall K \in T_h, \frac{\partial (v|_K)}{\partial x_i} \in L^2(K) \text{ alors } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

où x_i désigne l'une des coordonnées. On en déduit donc que si $v \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\forall i, \forall K \in T_h$, $\dfrac{\partial (v|_K)}{\partial x_i} \in L^2(K)$, alors $v \in H^1(\Omega)$.

(m) Soit :

$$X_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) / \frac{\partial v_h}{\partial y} \in C^0(\overline{\Omega}); \forall K \in T_h,\ v_h|_K \in W \right\}$$

Démontrez que $X_h \subset X$.

(n) Démontrez qu'il existe un et un seul élément de X_h prenant des valeurs données ainsi que sa dérivée partielle en y en tous les sommets de la triangulation. En déduire la construction d'un sous espace V_h de V inclus dans X_h permettant de traiter les conditions limites du problème (P). Quel est la dimension de V_h?

(o) Lorsqu'on utilise l'élément fini (K, Σ_K, W) ainsi défini, combien y a-t-il au maximum de termes non nuls par ligne dans la matrice obtenue?

26. Soit $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = 1$ une "triangulation" de Ω, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $P_k(I_j)$ l'ensemble des polynômes de degré au plus k sur I_j, $h = \max\limits_{1<j<I}(x_j - x_{j-1})$, $V_h = \{v_h \in L^2(\Omega) / \forall j \in [1, I], v_{h|I_j} \in P_1(I_j)\}$ et $W_h = \{w_h \in C^1(\overline{\Omega}) / \forall j \in [1, I], w_{h|I_j} \in P_3(I_j) \text{ et } w(0) = w(1) = 0\}$.

(a) Démontrez que si $v \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\forall j \in [1, I], v_{|I_j} \in H^1(\overset{o}{I}_j)$, alors $v \in H^1(\Omega)$.

(b) Démontrez que $W_h \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $V_h \not\subset H^1(\Omega)$. Démontrez que $\forall w_h \in W_h, w_h'' \in V_h$.

(c) Démontrez que le problème (P) : trouver $u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega u'v' = \int_\Omega fv$ a une solution unique. Démontrez que $-u'' = f$ et que $u \in H^2(\Omega)$.

(d) Démontrez que (P) est équivalent à (P') : trouver $u \in H_0^1(\Omega), \forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega uw'' = -\int_\Omega fw$.
On va étudier le problème (P_h) : trouver $u_h \in V_h$ tel que $\forall w_h \in W_h$, $\int_\Omega u_h w_h'' = -\int_\Omega f w_h$.

(e) Pourquoi (P_h) n'est pas un problème approché de (P') au sens du cours?

(f) Soit a la forme bilinéaire symétrique sur $W_h \times W_h$ définie par $a(x_h, y_h) = \int_\Omega x_h'' y_h''$. Démontrez que a est elliptique (on rappelle qu'en dimension finie, tout forme bilinéaire -et donc continue pour toute norme- symétrique définie positive est elliptique). En déduire qu'il existe un unique $z_h \in W_h$ tel que $\forall w_h \in W_h$ $\int_\Omega z_h'' w_h'' = -\int_\Omega f w_h$. En déduire que (P_h) a une solution.

(g) Démontrez que $\dim V_h = 2I$.

(h) Ecrire les conditions vérifiées par une fonction P_3 par morceaux pour être dans W_h; démontrez que $\dim W_h = 2I$.

(i) Démontrez que $\forall v_h \in V_h, \exists! w_h \in W_h$ tel que $w_h'' = v_h$. Démontrez l'unicité de la solution de (P_h).

(j) Démontrez que $\forall v_h \in V_h, \int_\Omega (u - u_h) v_h = 0$. Démontrez que $\|u - u_h\|_0 \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_0$.

On rappelle que $H^2(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$. On admet que la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x, y \in [0,1],\ g(x) = g(y) + g'(y)(x-y) + \int_y^x g''(t)(x-t)dt$$

est valide pour $g \in H^2(\Omega)$. Pour $v \in H^2(\Omega)$, on définit $P_h v \in V_h$ sur $[0,1]$ par $\forall j \in [0, I-1]$, $P_h v(x_j) = v(x_j)$ et $(P_h v)'(x_j) = v'(x_j)$, c'est à dire que pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $P_h v(x) = v(x_j) + v'(x_j)(x - x_j)$.

(k) Démontrez que :

$$\forall x \in [x_j, x_{j+1}],\ |v(x) - P_h v(x)|^2 \leq \frac{h^3}{3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v''^2$$

Puis que :

$$\|v - P_h v\|_0 \leq \frac{h^2}{\sqrt{3}} |v|_2$$

En déduire la convergence de la méthode numérique proposée:

$$\|u - u_h\|_0 \leq \frac{h^2}{\sqrt{3}} |v|_2$$

(l) Comparez (de tous les points de vue...) cette méthode numérique avec la méthode des éléments finis linéaires vue en cours.

27. Soit Ω un ouvert de R^n de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. On suppose $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

(a) Démontrez que l'application "restriction" de $L^2(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma_1)$, $v \to v_{|\Gamma_1}$ est continue.

(b) Soit $V = \{v \in H^1(\Omega)/v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$. Démontrez que V est un sous espace de Hilbert de $H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\| \|_1$.

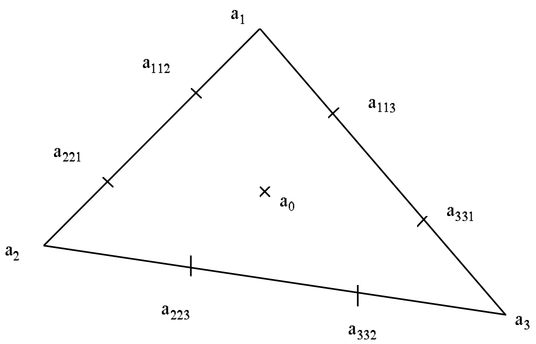
(c) Soit $a : V \times V \to R$, définie par $a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv)$ et soit $f \in L^2(\Omega)$. Démontrez que le problème "trouver $u \in V, \forall v \in V, a(u, v) = \int_\Omega f v$" admet une solution unique que l'on note u dans la suite. On admet que $u \in H^2(\Omega)$.

(d) Démontrez que u est solution d'un problème aux limites (équation aux dérivées partielles assortie de conditions aux limites) que l'on précisera.

(e) Démontrez que si $w \in H^2(\Omega)$ est solution de ce problème aux limites, alors $w = u$.

(f) Soit p un polynôme de $P_3(R^2)$ ($p = \sum_{i+j<3} \alpha_{ij} x^i y^j$). Démontrez que si p est nul en 4 points distincts d'une droite d'équation $y = ax + b$ alors p est nul sur toute la droite. Généralisez au cas d'une droite quelconque.

(g) Soit T un triangle (a_1, a_2, a_3). On note λ_1, λ_2 et λ_3 les coordonnées barycentriques dans ce triangle. On note a_0 le point de coordonnées barycentriques $(1/3, 1/3, 1/3)$, et a_{iij} le point de coordonnées barycentriques $2/3$ sur a_i et $1/3$ sur a_j comme indiqué sur la figure ci dessous.On note G l'ensemble de ces 10 points a_0, a_i pour $i = 1, 2, 3$ et a_{iij} pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.



Soit $f_0 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Démontrez que $f_0 \in P_3(R^2)$ et que $f_0(a_0) = 1$ et que f_0 est nulle sur les autres points de G.

(h) En s'inspirant de la forme du polynôme f_0, déterminez, en fonction des λ, $f_i \in P_3(R^2)$ valant 1 en a_i et nul sur les autres points de G.

(i) Déterminez de même, en fonction des λ, p_{iij} valant 1 en a_{iij} et nul sur les autres points de G.

(j) Démontrez qu'il existe un unique polynôme de $P_3(R^2)$ prenant des valeurs données aux points de G.

(k) Démontrez que ce triangle définit un élément fini continu, c'est à dire qu'une fonction, définie sur un maillage de triangles par sa valeur aux 10 points G de chaque triangle, et dont la restriction à chaque triangle est dans $P_3(R^2)$, est globalement continue sur le maillage.