Licence de Mathématiques. IUP 2ème année T.Nkaoua F. Angrand G. Samba

1995-96

1. Dans R^n $(n \geq 2)$, soit $\alpha \in]0,1[$ et f définie par :

$$f : \begin{array}{l} R^n \longrightarrow R \\ x \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{array}$$

Démontrez que f n'est pas une norme.

2. Sur l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes (ou réels), on définit :

$$\|A\|_F = [Tr(AA^*)]^{\frac{1}{2}}$$

(a) Calculez $\|A\|_F$ en fonction des coefficients de A.

(b) Démontrez que $\| \quad \|_F$ est une norme matricielle (appelée Norme de Frobenius).

(c) Cette norme est-elle une norme induite, c'est à dire existe-t-il une norme N sur C^n(ou R^n) telle que $\|A\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{N(Ax)}{N(x)}$?

3. Sur l'ensemble des matrices à coefficients complexes, on considère les normes $1, 2, \infty$, induites par les normes correspondantes sur C^n. Démontrez pour toute matrice A :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}| \qquad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = \sqrt{\rho(AA^t)}$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2$$

4. Démontrez que pour toute norme induite $\|.\|$ et toute matrice A :

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Remarque : en fait ce résultat est aussi vrai si la norme n'est pas une norme induite.

5. On considère C^n muni du produit scalaire usuel noté (,) :

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

Soient A et B deux opérateurs (applications linéaires de C^n dansC^n) diagonalisables.

(a) Démontrez que A et B commutent si et seulement si A et B ont même vecteurs propres.

(b) On rappelle que l'opérateur adjoint noté A^* (A^t dans le cas réel) d'un opérateur A, vérifie :

$$\forall x, y \in C, (Ax, y) = (x, A^* y)$$

On dit qu'un opérateur est normal s'il commute avec son adjoint. Démontrez qu'un opérateur normal est diagonalisable en base orthonormée. En déduire pour le cas réel que si A est symétrique ($A = A^t$), alors A n'a que des valeurs propres réelles et est diagonalisable en base orthonormée.

6. On considère la matrice carrée tridiagonale d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrez que les vecteurs u^k définis pour $1 \leq k \leq n$ par :

$$u_j^k = \sin \frac{jk\pi}{n+1}$$

sont vecteurs propres pour les valeurs propres :

$$\sigma_k = 2(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1}) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$$

(b) Calculez les valeurs propres de la matrice tridiagonale :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

7. On considère la matrice $n^2 \times n^2$ par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} B & T & & & & \\ T & B & T & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & T & B & T \\ & & & & & T & B \end{pmatrix}$$

où B et T sont symétriques d'ordre n et commutent. Soit λ_i et ω_i les valeurs propres respectivement de B et T.

(a) Démontrez qu'il existe une base dans laquelle M est diagonale par blocs de matrices tridiagonales.

(b) Calculez les valeurs propres de M en fonction des λ_i et ω_i.

8. Soit la matrice d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez A^{-1} pour $n = 3, 4$.

(b) Calculez A^{-1} pour n quelconque.

(c) Calculez $cond_1 A$.

9. On munit C^n d'une norme et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de la norme induite. Soit A une matrice inversible.

(a) Soit u et $u + \delta u$ solutions de :

$$Au = b \quad et \quad A(u + \delta u) = b + \delta b$$

Démontrez que :

$$\frac{||\delta u||}{||u||} \leq Cond(A) \frac{||\delta b||}{||b||}$$

(b) Soit δA une matrice et u et δu solutions de :

$$Au = b \quad et \quad (A + \delta A)(u + \delta u) = b$$

Démontrez que :

$$\frac{||\delta u||}{||u + \delta u||} \leq Cond(A) \frac{||\delta A||}{||A||}$$

10. Résoudre les systèmes :

$$\begin{pmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Interprétez les résultats.

11. Soit A et B deux matrices réelles symétriques définies positives. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $\mu_1, ..., \mu_n$, et $\nu_1, ..., \nu_n$ les valeurs propres de A, B et $A + B$ rangées dans l'ordre croissant.

(a) Démontrez que $\nu_n \leq \lambda_n + \mu_n$ et $\nu_1 \geq \lambda_1 + \mu_1$.En déduire que :

$$cond_2(A+B) \leq \frac{\lambda_n + \mu_n}{\lambda_1 + \mu_1}$$

.

(b) Démontrez que $cond_2(A+B) \leq \max(cond_2 A, cond_2 B)$.

12. Soit la matrice d'ordre N :

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez les valeurs propres de $A(\varepsilon)$. Ce problème de valeurs propres est-il bien conditionné ?

13. Soit L une matrice triangulaire inférieure, bidiagonale et inversible avec

$$L_{i,i-1} \neq 0 \text{ pour } i = 2, n$$

On pose $M = L^{-1}$. On sait que M est triangulaire inférieure.

(a) On cherche à résoudre $Lx = b$. Ecrire l'algorithme de résolution directe sous la forme la plus simple possible. Evaluez le nombre d'opérations nécessaires.

(b) Calculez $m_{j,j}$ en fonction de L et établir une relation de récurrence entre $m_{i+1,j}$ et $m_{i,j}$. En déduire que tous les $m_{i,j}$ sont non nuls pour $i \geq j$.

(c) Calculez le nombre d'opérations nécessaire pour calculer Mb. Comparez avec le nombre d'opérations de la résolution directe de $Lx = b$.

14. Effectuer la décomposition LU de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

15. On cherche à résoudre $A^2 x = b$ pour plusieurs seconds membres b, la matrice A étant inversible mais sans autre propriété particulière. Existe–t-il une autre stratégie que de calculer et de factoriser A^2?

16. Soit A symétrique définie positive. Soit $B^t B$ la décomposition de Cholesky de A. Ecrire l'algorithme de calcul de B. Combien d'opérations cela nécessite-t-il? Comparez avec la factorisation LU. Calculez la décomposition de Cholesky de :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

17. Soit (x_i, y_i) N couples de réels et $F(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2$.

   (a) Trouvez (α, β) qui minimise F. Interprétez $F(\alpha, \beta)$ géométriquement.

   (b) Soit:
$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \quad U = (a,b) \quad V = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$
   Montrez que :
$$F(a,b) = \|MU - V\|^2$$

   (c) Soit A une matrice réelle $m \times n$, b un vecteur de R^n. Soit :
$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax - b, Ax - b).$$
   Soit P et P' les problèmes :
$$P : \qquad Trouver\ x \in R^n, \forall y \in R^n, J(x) \leq J(y)$$
$$P' : \qquad Trouver\ x \in R^n, A^t A x = A^t b$$

   1. Démontrez que :
$$\forall x \in R^n \ J(x) = \frac{1}{2}(A^t A x, x) - (A^t b, x) + \frac{1}{2}(b,b)$$
$$\forall x, y \in R^n \ J(x+y) = J(x) + (A^t A x - A^t b, y) + \frac{1}{2}(A^t A y, y)$$
      En déduire que x solution de P' entraîne x solution de P.
   2. Soit x solution de P. Calculez le gradient de J en x. En déduire que x est solution de P'.

   (d) Retrouvez (α, β) grâce à ces derniers résultats.

18. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$
   Pour quelles valeurs de a :

   (a) la matrice est-elle définie positive ?

   (b) la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

19. Soient les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont-elles convergentes pour ces matrices ?

20. On dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante ssi :
$$\forall i, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

(a) Démontrez que A est inversible.

(b) Démontrez que l'on peut définir la méthode de Jacobi pour A et qu'elle converge.

21. On considère le système linéaire de 10 équations à 10 inconnues :

$$\begin{array}{ll} -2x_1 + x_2 = b_1 & \\ x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1} = b_j & j = 2, ..., 9 \\ x_9 - 2x_{10} = b_{10} & \end{array}$$

(a) Ecrire la matrice A du système linéaire $Ax = b$.

(b) Ecrire les relations de récurrence entre les composantes de x^{k+1} et de x^k si l'on applique les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel au système linéaire.

On considère à présent une autre numérotation des inconnues :

$$\begin{array}{lllll} y_1 = x_1 & y_2 = x_3 & y_3 = x_5 & y_4 = x_7 & y_5 = x_9 \\ y_6 = x_2 & y_7 = x_4 & y_8 = x_6 & y_9 = x_8 & y_{10} = x_{10} \end{array}$$

et une autre numérotation des équations :

$$\begin{array}{lllll} c_1 = b_1 & c_2 = b_3 & c_3 = b_5 & c_4 = b_7 & c_5 = b_9 \\ c_6 = b_2 & c_7 = b_4 & c_8 = b_6 & c_9 = b_8 & c_{10} = b_{10} \end{array}$$

On obtient donc un nouveau système équivalent à celui de départ $Ky = c$.

(c) Ecrire la matrice K du système linéaire.

(d) Ecrire les relations de récurrence entre les composantes de x^{k+1} et de x^k si l'on applique les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel au système linéaire $Kx = c$. Comparer les avec celles obtenues sur le système de départ.

22. Soit A symétrique définie positive de valeurs propres $0 < \lambda_n \leq .... \leq \lambda_1$. On pose $K(A) = \lambda_1/\lambda_n$.Démontrez que (inégalité de Kantorovitch) :

$$\forall x \quad 1 \leq \frac{(Ax, x)(A^{-1}x, x)}{(x, x)} \leq \frac{\left(\sqrt{K(A)} + \frac{1}{\sqrt{K(A)}}\right)^2}{4}$$

23. Soit A réelle symétrique définie positive. On note $\overline{x}$ la solution de $Ax = b$, $e(x) = x - \bar{x}$, $J(x) = (Ax, x) - 2(b, x)$, $E(x) = (Ae(x), e(x))$, $r(x) = b - Ax$.

(a) Démontrez que $r(x) = Ae(x)$ et que J et E admettent un minimum unique en $\bar{x}$.

On s'intéresse dans la suite aux méthodes de descente de la forme : $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ où p_k est appellé direction de descente.

(b) Calculez α_k qui minimise $E(x_{k+1})$. On choisit cette valeur dans la suite. Démontrez que :

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \text{ et } (p_k, r_{k+1}) = 0$$

$$E(x_{k+1}) = E(x_k)(1 - \gamma_k) \text{ avec } \gamma_k = \frac{(r_k, p_k)^2}{(Ap_k, p_k)(A^{-1}r_k, r_k)}$$

$$\gamma_k \geq \frac{1}{K(A)}\left(\frac{r_k}{\|r_k\|}, \frac{p_k}{\|p_k\|}\right)^2 \text{ avec } K(A) = cond_2(A)$$

(c) On suppose $\exists\mu > 0, \forall k, (\frac{r_k}{\|r_k\|}, \frac{p_k}{\|p_k\|})^2 \geq \mu$. Démontrez que $x_k \longrightarrow \bar{x}$ et que si l'on suppose $p_k = r_k$ on a :

$$\exists C, \forall k, \|x_k - \bar{x}\| \leq C \left(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\right)^k$$

On cherche désormais dans la suite p_k sous la forme $p_k = r_k + \beta_k p_{k-1}$.

(d) Calculez β_k pour que la réduction de $E(x_{k+1})$ par rapport à $E(x_k)$ soit maximale. Démontrez qu'alors :

$$(Ap_{k-1}, p_k) = 0,\ (r_{k+1}, r_k) = 0,\ \beta_k = \frac{\|r_k\|^2}{\|r_{k-1}\|^2}$$

(e) On appelle K_k l'espace de Krylov : $K_k = vect(r_0, Ar_0, ..., A^k r_0)$. Soit $k \geq 1$. On suppose que pour $1 \leq i \leq k$, $r_i \neq 0$.Démontrez que :

$$\begin{array}{l} \forall i \leq k-1\ (r_k, p_i) = 0 \\ K_k = vect(r_0, r_1, ..., r_k) = vect(p_0, p_1, ..., p_k) \\ \forall i \leq k-1\ (p_k, Ap_i) = (Ap_k, p_i) = 0 \\ \forall i \leq k-1\ (r_k, r_i) = 0 \end{array},$$

(f) Démontrez que x_k réalise le minimum de E sur $x_0 + K_k$.

24. Ecrire l'algorithme de gradient conjugué de la manière la "plus simple" possible pour le système linéaire $Ax = b$ écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^{-\frac{1}{2}} A M^{-\frac{1}{2}} y = M^{-\frac{1}{2}} b \\ x = M^{-\frac{1}{2}} y \end{array} \right.$$

où M et A sont deux matrices carrées symétriques définies positives.

25. On considère dans R^3 la forme quadratique :

$$J(x) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2$$

(a) Calculer la matrice symétrique A de la forme quadratique :

$$J(x) = (Ax, x)$$

(b) Quelles sont les propriétés de positivité de A.

(c) Calculer la décomposition de Cholesky de A. Commenter le résultat.

(d) Expliciter l'algorithme de gradient à pas constant appliqué à la minimisation de J :

$$x^{k+1} = x^k - \rho \nabla J(x^k)$$

où ρ désigne un paramètre constant positif.

Pour étudier la convergence de l'algorithme, on utilise la base de vecteurs propres de A qui sont (résultat admis) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. On peut prendre comme base orthonormée de vecteurs propres :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0),\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

A tout x on associe ses coordonnées X dans la base (v_1, v_2, v_3):

$$x = X_1 v_1 + X_2 v_2 + X_3 v_3$$

(e) Ecrire pour l'algorithme de gradient à pas constant la relation entre X^{k+1} et X^k.

(f) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur ρ pour que l'algorithme converge. Quelle est la limite de X^k et x^k ? Commenter le résultat.

26. On considère une matrice carrée réelle A d'ordre n symétrique définie positive $A = (a_{i,j})$. Soit :

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

où b désigne un vecteur de R^n. On envisage un algorithme de descente pour minimiser J. On note x^k le point à l'étape k et d^k la direction de descente. Pour calculer x^{k+1}, on minimise J à partir de x^k dans la direction d^k. On cherche α^k tel que : $J(x^k + \alpha^k d^k) = \min_\alpha J(x^k + \alpha d^k)$

(a) Démontrez que :

$$\frac{d}{d\alpha} J(x^k + \alpha d^k) = (\nabla J(x^k + \alpha d^k), d^k)$$

Soit $g^k = \nabla J(x^k)$.

(b) Démontrez que $g^k = Ax^k - b$ et que $\alpha^k = -\dfrac{(g^k, d^k)}{(Ad^k, d^k)}$.

On considère à présent l'algorithme dans lequel on choisit comme direction de descente les vecteurs unitaires $e_1, e_2, ..., e_n$ de R^n dans cet ordre et en recommençant cycliquement.

(c) Démontrer que si la direction en cours est e_i alors $\alpha^k = -\dfrac{(Ax^k - b)_i}{a_{i,i}}$.

(d) Montrer que l'algorithme s'écrit alors :

$$\begin{array}{l} x_j^{k+1} = x_j^k \text{ pour } j \neq i \\ a_{i,i} x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^k \end{array}$$

(e) Déduire de ce qui précède que n itérations de l'algorithme précédent sont équivalentes à 1 itération de Gauss Seidel.

27. Soit A une matrice réelle symétrique définie positive d'ordre n, $A = (a_{i,j})$. Soit $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.où b désigne un vecteur de R^n. On envisage un algorithme de descente pour minimiser J. On note x^k le point à l'étape k et d^k la direction de descente. Pour calculez x^{k+1}, on minimise J à partir de x^k dans la direction d^k. On cherche donc α^k tel que :

$$J(x^k + \alpha^k d^k) = \min_\alpha J(x^k + \alpha d^k)$$

On rappelle que :

$$\frac{d}{d\alpha} J(x^k + \alpha^k d^k) = (\nabla J(x^k + \alpha^k d^k), d^k)$$
$$g^k = \nabla J(x^k) = Ax^k - b$$

On choisit comme direction de descente : $d^k = -Sg^k$ où S est une matrice symétrique définie positive.

(a) Montrer que :

$$\frac{d}{d\alpha} J(x^k + \alpha^k d^k)_{|\alpha=0} \leq 0$$

A quelle condition a-t-on l'égalité. Commenter le résultat.

(b) Dans le cas où $S = I$ (identité), comment s'appelle l'algorithme obtenu?

(c) Dans le cas où $S = A^{-1}$, que devient l'algorithme ? En combien d'itérations converge-t-il ? Que pensez vous de son intérêt pratique ? théorique ?

On peut montrer (résultat admis) que :

$$\left(A(x^{k+1} - \bar{x}), (x^{k+1} - \bar{x})\right) \leq \left(\frac{\gamma_n - \gamma_1}{\gamma_n - \gamma_1}\right)^2 \left(A(x^k - \bar{x}), (x^k - \bar{x})\right)$$

où $\bar{x}$ est la solution de $Ax = b$, γ_n est la plus grande valeur propre de SA et γ_1 est la plus petite valeur propre de SA.

On suppose dans la suite que $A = I + B$ où B est symétrique définie positive et de valeurs propres :

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq \varepsilon < 1$$

(d) Montrez que :

$$(I + B)^{-1} - (I - B) = (I + B)^{-1}B^2$$

(e) Démontrer que :

$$\|A^{-1} - (I - B)\|_2 \leq \varepsilon^2$$

On considère l'algorithme de descente avec $S = I - B$.

(f) Montrez que $\gamma_1 = 1 - \mu_n^2$ et $\gamma_n = 1 - \mu_1^2$.

On cherche à comparer la convergence de l'algorithme pour $S = I$ et $S = I - B$. Soit $\lambda_1$et λ_n la plus petite et la plus grande valeur propre de A. On pose :

$$r_0 = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$
$$r = \frac{\gamma_n - \gamma_1}{\gamma_n + \gamma_1}$$

qui sont les "facteurs de réduction d'erreur" pour chacune des 2 méthodes décrites précédemment.

(g) Démontrez que :

$$r_0 = \frac{\mu_n - \mu_1}{2 + \mu_n + \mu_1}$$
$$r = \frac{\mu_n^2 - \mu_1^2}{2 - (\mu_n^2 + \mu_1^2)}$$

et que :

$$\varepsilon < \frac{1}{3} \Longrightarrow r < r_0$$

Commentaires.

(h) Démontrez que pour ε au voisinage de 0, on a :

$$r_0(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$
$$r(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$$

Commentaires.

28. Soit A une matrice symétrique définie positive. On écrit A sous la forme :

$$A = D - E - E^t$$

avec D diagonale, E triangulaire strictement inférieure.Soit $0 < \omega < 2$. On pose :

$$C = \frac{1}{\omega(2 - \omega)}(D - \omega E)D^{-1}(D - \omega E^t)$$

(a) Démontrez que C est symétrique définie positive et que les valeurs propres de $C^{-1}A$ sont comprises entre 0 et 1. Montrez que pour $\omega = 1$, 1 est valeur propre de $C^{-1}A$.

(b) On suppose :

$$\exists \mu, \delta \geq 0 \ \max_{x \neq 0} \frac{(Dx,x)}{(Ax,x)} \leq \mu \quad \text{et} \quad \max_{x \neq 0} \frac{(ED^{-1}E^t x, x) - \frac{1}{4}(Dx,x)}{(Ax,x)} \leq \delta$$

Démontrez qu'il existe ω pour lequel :

$$K(C^{-1}A) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\frac{1}{2}+\delta)\mu} + 1\right)$$

et que si $\omega = 1$:

$$K(C^{-1}A) \leq 1 + \frac{\mu}{4} + \delta$$

29. Soit $\|.\|$ une norme sur l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre N. Soit A une matrice carrée inversible complexe. On suppose que l'on dispose de X_0 une "approximation" de A^{-1}. Le but de l'exercice est de voir que l'on peut construire une "meilleure approximation" de A^{-1} que X_0. On pose $E_0 = A^{-1} - X_0$. On suppose que $\|E_0\| \leq \dfrac{1}{2\|A\|}$

(a) Démontrez que :

$$A^{-1} = 2X_0 - X_0 A X_0 + E_0 A E_0$$

(b) On définit les suites :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 2X_k - X_k A X_k \\ E_{k+1} &= A^{-1} - X_{k+1} \end{aligned}$$

Démontrez que pour $k \geq 0$: $E_{k+1} = E_k A E_k$

(c) Démontrez que la suite E_k tend vers 0 de manière quadratique et que la suite X_k tend vers A^{-1}.

(d) Calculez le nombre d'opérations nécessaires pour calculer X_{k+1}. Commentez le résultat.

30. Soit A symétrique réelle d'ordre n. Soit $1 \leq p < q \leq n$. Soit θ un réel et Ω la matrice définie par :

$$\begin{cases} \Omega_{pp} = \Omega_{qq} = \cos\theta \\ \Omega_{p,q} = -\Omega_{qp} = \sin\theta \\ \Omega_{ii} = 1 \ \text{ si } i \neq p,q \\ \Omega_{ij} = 0 \ \text{ si } i \neq p,q \text{ et } j \neq p,q \end{cases}$$

Soit $B = \Omega^t A \Omega$.

(a) Démontrez que Ω est orthogonale, que B est symétrique et vérifie :

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

On suppose désormais que $a_{pq} \neq 0$.

(b) Démontrez que : $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[\ \ b_{pq} = 0$, et que c'est l'unique solution de $\cot 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$. On prend désormais pour θ cette valeur et on pose $B = f_{pq}(A)$.

(c) Démontrez que :

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

(d) Démontrez que :

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} \quad si \;\; i \neq p, q \; et \, j \neq p, q \\ b_{pi} = a_{pi}\cos\theta - a_{qi}\sin\theta \quad si \;\; i \neq p, q \\ b_{qi} = a_{pi}\sin\theta + a_{qi}\cos\theta \quad si \;\; i \neq p, q \\ b_{pp} = a_{pp}\cos^2\theta + a_{qq}\sin^2\theta - a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{qq} = a_{pp}\sin^2\theta + a_{qq}\cos^2\theta + a_{pq}\sin 2\theta \end{cases}$$

(e) Calculez $t = \tan\theta$ en fonction de $\tau = \cot 2\theta$; Calculez $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$ en fonction de t. Vérifiez que :

$$\begin{cases} b_{pi} = ca_{pi} - sa_{qi} \quad si \;\; i \neq p, q \\ b_{qi} = sa_{pi} + ca_{qi} \quad si \;\; i \neq p, q \\ b_{pp} = a_{pp} - ta_{pq} \\ b_{qq} = a_{pp} + ta_{pq} \end{cases}$$

(f) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez $B = f_{12}(A)$, puis $f_{23}(B)$.

31. On munit l'espace des matrices carrées M_n d'une norme matricielle. Pour une matrice A, on définit :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

(a) Démontrez que cette série est convergente.

(b) Démontrez que si A et B commutent alors $e^A e^B = e^{A+B}$.

(c) Démontrez que l'application de R dans M_n $t \to e^{tA}$ est dérivable et calculez sa dérivée.

(d) Soit A une matrice carrée et (E) l'équation différentielle :

$$(E) \;\; \begin{cases} y' + Ay = f \qquad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où f est une fonction de classe C^∞. On admet l'unicité de la solution. Démontrez que cette solution est :

$$e^{-tA}y_0 + \int_0^t e^{-sA} f(t-s)ds = e^{-tA}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds$$

32. On considère l'équation différentielle dans R :

$$(E) \;\; \begin{cases} y' + ay = 0 \qquad t \in [0, 1] \\ y(0) = b \end{cases}$$

On subdivise $[0, 1]$ par $x_n = nh$, et $h = 1/N$ où N est un entier. Soit la suite y_n définie par :

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + ay_n = 0 \quad \text{et} \;\; y_0 = b$$

(a) Calculez y_n en fonction de b, h, n et A.

(b) Démontrez que :

$$y_n = be^{-ax_n} - hb\frac{a^2 x_n}{2} e^{-ax_n} + O(h^2)$$

(c) Démontrez que :

$$y_n - y(x_n) = O(h)$$

33. Soit g continue de R dans R, et f de classe C^1.

(a) Calculez la dérivée de $H(t) = e^{-\int_0^t g(s)ds} f(t)$.

(b) On suppose que f vérifie $f' - gf \leq 0$ sur R^+.
Démontrez que : $\forall t \in R^+ \quad f(t) \leq f(0)\, e^{\int_0^t g(s)ds}$.

(c) Soit ϕ continue sur R^+ et h continue et positive sur R^+. On suppose qu'il existe C tel que : $\forall t \in R^+ \;\; \phi(t) \leq \int_0^t \phi(s)h(s)ds \; + \; C$. Démontrez que (Lemme de Gronwall) : $\forall t \in R^+ \;\; \phi(t) \leq C e^{\int_0^t h(s)ds}$.

34. Soit ϕ réelle vérifiant : $\exists K > 0, \forall u, v \in R\,, |\phi(u) - \phi(v) \leq K|u - v|$. Soit f et g deux applications réelles continues. g vérifie : $\exists \varepsilon_1 \geq 0, \forall u \in R, |g(u)| \leq \varepsilon_1$. Soit y et z solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + \phi(y) = f \\ y(0) = a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z' + \phi(z) = f + g \\ y(0) = a + \varepsilon_0 \end{array} \right.$$

.

(a) Ecrire l'équation différentielle dont est solution $w = z - y$.

(b) Démontrez que sur $[0, T]$, $w = O\left(|\varepsilon_0| + |\varepsilon_1|\right)$.
On suppose désormais que ϕ est de classe C^2. Soit u solution de : $\left\{ \begin{array}{l} u' + \phi'(y)u = g \\ u(0) = \varepsilon_0 \end{array} \right.$

(c) Ecrire l'équation différentielle dont est solution $\theta = w - u$.

(d) Démontrez que sur $[0, T]$, $\theta = O\left(|\varepsilon_0|^2 + |\varepsilon_1|^2\right)$.

35. Soit $(E1)$ l'équation différentielle : $y' - 3y = -3t, t \in [0, 5]$.

(a) Résoudre $(E1)$ pour les conditions initiales $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} + \varepsilon$.

(b) Calculez $y(5)$ pour les 2 conditions initiales. On dit que $(E1)$ est numériquement bien posé avec la première condition et numériquement mal posé avec la deuxième. Soit $(E2)$ l'équation différentielle : $y' + 150y = 49, t \in [0, 1]$.

(c) Résoudre $(E2)$ et démontrez que $(E2)$ est numériquement bien posé.

36. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + a^2 y = \sin \omega t$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$.

37. Sur $[0,T]$, on définit une subdivision $t_0 = 0, < t_1 < ... < t_N = T$. On pose $h_n = t_{n+1} - t_n$, $h = \max\limits_{0<n<N} h_n$. On considère l'équation différentielle réelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t,y), t \in [0,T] \\ y(0) = \alpha \end{array} \right.$$

On suppose que f vérifie la condition de Lipschitz :

$$\exists L > 0, \forall y, z \in R, \forall t \in [0,T], |f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$$

et que y est de classe C^2. On pose $M = \max\limits_{t \in [0,T]} y''(t)$.

La méthode d'Euler s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = f(t_n, y_n) \\ y_0 = \alpha_h \end{array} \right.$$

où α_h est une "valeur approchée" de α telle que $\lim\limits_{h \to 0} \alpha_h = \alpha$. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n f(t_n, y(t_n)) \\ e_n = y(t_n) - y_n \end{array} \right.$$

(a) Soit θ_n et c_n 2 suites de réelles vérifiant : $\theta_{n+1} \leq (1 + Lh_n)\theta_n + c_n$. Démontrez :

$$\forall n \in N, \theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_n - t_{i+1})} c_i$$

(b) Démontrez que :

$$|\varepsilon_n| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - y'(t_n) dt \right| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - t) y''(t) dt \right| \leq h_n^2 M$$

(c) Démontrez que :

$$e_{n+1} = e_n + h_n \left(f(t_n, y(t_n) - f(t_n, y_n) \right) + \varepsilon_n \text{ et } |e_{n+1}| \leq (1 + Lh_n)|e_n| + |\varepsilon_n|$$

(d) Démontrez que :

$$|e_n| \leq e^{Lt_n} \left(|\alpha_h - \alpha| + t_n M h \right) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \left(\max_{0<n<N} |e_n| \right) = 0$$

Dans la pratique, on calcule $f(t_n, y_n)$ avec une précision μ_n, et l'on commet des erreurs d'arrondis ρ_n sur le calcul de y_{n+1}. On suppose $\forall n, |\mu_n| \leq \mu$ et $|\rho_n| \leq \rho$. En fait, on calcule donc y_n^* solution de :

$$y_{n+1}^* = y_n^* + h_n f(t_n, y_n^*) + h_n \mu_n + \rho_n$$

(e) Démontrez que ($e_n^* = y(t_n) - y_n^*$) :

$$|e_{n+1}^*| \leq (1 + Lh_n)|e_n^*| + |\varepsilon_n| + h_n \mu + \rho$$

puis que :

$$|e_n^*| \leq e^{Lt_n} \left(|\alpha_h^* - \alpha| + t_n M h + t_n \mu + n\rho \right)$$

Donnez une interprétation pour chacun des 4 termes de la majoration précédente et expliquez ce qui numériquement risque de se passer.

(f) On suppose que $\forall n, h = h_n$, démontrez que l'on a pour $|e_n^*|$ une majoration de la forme :

$$|e_n^*| \leq A + Bh + \frac{\rho C}{h} = \varphi(h)$$

Etudiez φ et en déduire qu'il existe une valeur "optimale" pour h. Démontrez qu'il existe $\bar{h}$ tel que si $h \leq \bar{h}$, alors $\forall n, y_n^* = \alpha_h^*$.

On considère un schéma de résolution de la forme :

$$S_\Phi \left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ y_0 = \alpha_h \end{array} \right.$$

où Φ est une application de $[0,T] \times R \times [0,\tilde{h}]$ dans R continue qui ne dépend que de f et $\lim_{h\to 0} \alpha_h = \alpha$. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n) \\ e_n = y(t_n) - y_n \end{array} \right.$$

On dit que le schéma S_Φ est consistant ssi :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = 0$$

On dit que S_Φ est d'ordre p ($p \geq 1$) ssi :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = O(h^p)$$

On dit que S_Φ est stable ssi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists M > 0, \text{tel que } \forall h \in [0,\tilde{h}], \forall \beta_n, y_n, z_n, \text{ suites de réels vérifiant :} \\ y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n) \\ z_{n+1} = z_n + h_n \Phi(t_n, z_n, h_n) + \beta_n \text{ on ait :} \\ \max_{0<n<N} |z_n - y_n| \leq M \left(|z_0 - y_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\beta_n| \right) \end{array} \right.$$

On dit que S_Φ est numériquement stable ssi il est stable avec une constante $M \leq 1$. (*Remarque : il existe des "dizaines" de notions différentes de stabilité...)*

On dit que S_Φ est convergent ssi :

$$\lim_{h\to 0} \left(\max_{0<n<N} |e_n| \right) = 0$$

(g) Démontrez que le schéma d'Euler explicite est de la forme S_Φ,qu'il est consistant, stable, et numériquement stable sous une condition sur h. Interprétez les notions de stabilité et de stabilité numérique au travers des exemples déjà vus.

(h) Démontrez que si S_Φ est consistant et stable alors il est convergent. Démontrez que si S_Φ est stable et d'ordre p, alors :

$$\exists C > 0, \forall n \leq N, |e_n| \leq C \left(|\alpha_h - \alpha| + h^p \right)$$

(i) Démontrez que :

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = \int_0^T |f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0)| dt$$

(j) Démontrez que :

$$S_\Phi \text{ est consistant} \iff \forall t \in [0,T], \forall y \in R,\ \Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

(k) Démontrez que si :

$$\exists K > 0, \forall t \in [0,T], \forall y, z \in R, \forall h \in [0,\tilde{h}],\ |\Phi(t,y,h) - \Phi(t,z,h)| \leq K|y - z|$$

alors S_Φ est stable.

(l) On suppose f de classe C^p. On définit la suite de fonctions f_k par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(t,y) = f(t,y) \\ 0 \leq k \leq p-1,\ f_{k+1} = \dfrac{\partial f_k}{\partial t}(t,y) + \dfrac{\partial f_k}{\partial y}(t,y).f_k(t,y) \end{array} \right.$$

Démontrez que y est de classe C^{p+1} et que $y^{(k+1)}(t) = f_k(t, y(t))$.

(m) On suppose Φ et f de classe C^p et que :

$$\forall t \in [0,T], \forall y \in R \ : \left\{ \begin{array}{l} \Phi(t,y,0) = f(t,y) \\ \forall k \leq p-1, \dfrac{\partial^k \Phi}{\partial h^k}(t,y,0) = \dfrac{1}{k} f_k(t,y) \end{array} \right.$$

Démontrez qu'alors S_Φ est d'ordre p. La réciproque est vraie, on l'admet.

On suppose f de classe C^p et que les fonctions f_k vérifient la condition de Lipschitz. Soit Φ définie par :

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} f_k(t,y)$$

(n) Démontrez que S_Φ est d'ordre p et stable. Quel est le défaut de cette méthode ?

(o) Soit q un entier ≥ 1,et $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_q \leq 1$ et $b_1, b_{2,}..., b_q$ des réels, $A = (a_{ij})$ une matrice carrée réelle d'ordre q. On définit :

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, w_j(y,h))$$

où les w_i sont solutions du système SI (non linéaire) :

$$SI : 1 \leq i \leq q, \ w_i(y,h) = y + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t + c_j h, w_j(y,h))$$

Le schéma $S_\Phi$correspondant appelé Runge-Kutta s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_n + c_j h_n, w_j(y_n, h_n))$$

(p) Démontrez que si $hL\rho(|A|) < 1$, alors SI admet une solution unique et RG est stable.

(q) On pose $e = (1,1,....,1) \in R^q$,$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_q \end{pmatrix}$. Démontrez que RG est d'ordre 1 ssi :

$$(b,e) = \sum_{j=1}^{q} b_j = 1$$

(r) Démontrez que RG est d'ordre 2 ssi :

$$(b,e) = 1 \text{ et } (b,Ce) = (b,Ae) = \frac{1}{2}$$

On pourrait démontrer que RG est d'ordre 3 ssi on a en plus :

$$(b,C^2e) = \frac{1}{3} \text{ et } (b,ACe) = \frac{1}{6}$$

et d'ordre 4 ssi on a en plus (de toutes les conditions précédentes) :

$$(b,C^3e) = \frac{1}{4}, \ (b,AC^2e) = \frac{1}{12}, (b,A^2Ce) = \frac{1}{24}, \ (b,CACe) = \frac{1}{8}$$

(s) On peut représenter une méthode de RG par le tableau :

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\
c_2 & a_{12} & a_{21} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_q & a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_q
\end{array}
$$

Ecrire les tableaux correspondants aux méthodes d'Euler explicite, rétrograde et centré. Vérifiez l'ordre de ces schémas grâce aux derniers résultats.

(t) Soit la méthode de Runge-Kutta définie par :

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Démontrez que ce schéma est d'ordre 4 et explicitez le.