Partiel Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles
2h30 26 Février 2001, T. NKaoua

1. Questions de Cours (7 points).

   (a) Les affirmations suivantes sont elles exactes ? (Ω désigne un ouvert borné de R^n de frontière régulière, $<,>$ désigne le crochet de distribution). Justifiez chacune de vos réponses.

      1. Pour f et g dans $L^2(\Omega)$ $< f, g >= \int_\Omega fg$
      2. Toute fonction continue sur Ω est dérivable
      3. $D(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$
      4. $|.|_1$ est une norme équivalente à $\|.\|_1$

   (b) Sachant que $H^1(0,1)$ est complet, démontrez que $H^2(0,1)$ est complet pour sa norme usuelle $\|.\|_2$.

   (c) Pour $T \in D'(\Omega)$, que signifie $T \in L^2(\Omega)$?

2. (3 points) Démontrez que $x \longmapsto xE(x) \in D'(0,+\infty)$ (E désigne la partie entière) et calculez sa dérivée.

3. (10 points) Soit V un espace de Hilbert réel. Le produit scalaire est noté $(,)$ et $\|.\|$ la norme associée. On note V' l'ensemble des formes linéaires continues sur V et τ l'isométrie canonique de Riesz de V' dans V. Soit V_h un sous espace vectoriel de dimension finie de V.

   (a) Démontrez que $\forall x \in V \ \sup\limits_{\substack{y \in V \\ \|y\|=1}} (x,y) = \|x\|$.
   Soit $a : V \to R$ bilinéaire, continue de constante de continuité M. Pour $u \in V$ on note Bu l'application de V dans R telle que $Bu(v) = a(u,v)$ pour $v \in V$. Soit $f \in V'$.

   (b) Démontrez que $Bu \in V'$ et que $B : u \longmapsto Bu$ est linéaire continue de V dans V'.

   (c) On note $A = \tau B = \tau o B$. Calculez (Au, v) pour $u, v \in V$.
   On note B_h la restriction de B à V_h, f_h la restriction de f à V_h, τ_h l'isométrie canonique de V_h' dans V_h et $A_h = \tau_h B_h$. Calculez $(A_h u_h, v_h)$ pour $u_h, v_h \in V_h$.
   On suppose que le problème P "trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V, a(u,v) = f(v)$" a une solution notée u (on ne suppose pas a elliptique).

   (d) Démontrez que le problème P_h "trouver $u_h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = f(v_h)$" est équivalent à "trouver $u_h \in V_h$ tel que $A_h u_h = \tau_h f_h$.
   On suppose désormais qu'il existe $\gamma > 0$ tel que:
   $$\inf_{\substack{u_h \in V_h \\ \|u_h\|=1}} \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ \|v_h\|=1}} a(u_h, v_h) \geq \gamma$$

   (e) Démontrez que $\inf\limits_{\substack{v_h \in V_h \\ \|v_h\|=1}} \|A_h v_h\| \geq \gamma$.

   (f) Démontrez que A_h est bijectif.

   (g) Démontrez que P_h a une unique solution notée u_h dans la suite.

   (h) Démontrez que pour $v_h, w_h \in V_h$ $(A_h(v_h - u_h), w_h) = a(v_h - u, w_h)$.

   (i) Démontrez que pour $v_h \in V_h$ $\|A_h(v_h - u_h)\| \leq M\|u - v_h\|$.

   (j) Démontrez que pour $\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\gamma}) \inf\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$