Maîtrise T. Nkaoua

7 Novembre 1997

ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE
PARTIEL, Durée 2H30, Documents Interdits

RAPPELS.
Pour toute matrice carrée complexe A, il existe une matrice unitaire U, c'est à dire telle que $U^* = U^{-1}$, et T triangulaire supérieure telle que $A = U^*TU$ ($U^* = \overline{U}^t$ par définition).
La factorisation LU d'une matrice carrée d'ordre n nécessite asymptotiquement $2n^3/3$ opérations, et la résolution d'un système triangulaire d'ordre n, n^2 opérations.

1. Question de Cours.
   (a) Qu'est ce que la décomposition de Cholesky ? (Aucune démonstration n'est demandée)
   (b) Démontrez l'unicité de la décomposition de Cholesky en en précisant les conditions.

2. Effectuez la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 20 & 23 \\ 15 & 50 & 67 \end{pmatrix}$$

   en précisant les détails des calculs et de la méthode.

3. Soit B une matrice carrée réelle antisymétrique d'ordre n, c'est à dire $B^t = -B$, soit $C = I - B$ et $D = I + B$, où I désigne la matrice identité d'ordre n.
   (a) Démontrez que les valeurs propres de B sont imaginaires pures.
   (b) Démontrez que C est inversible. On pose $A = DC^{-1}$.
   (c) Démontrez que A est orthogonale.

4. Soit A une matrice carrée réelle inversible d'ordre n sans propriété particulière. On cherche à résoudre des systèmes linéaires de la forme $A^2x = b$.
   (a) Démontrez qu'à partir de la décomposition LU de A, il est possible de résoudre $A^2x = b$ sans calculer A^2, uniquement en résolvant des systèmes linéaires de matrice L et U.
   (b) Laquelle des 2 méthodes est la plus intéressante, calculer A^2, effectuer sa décomposition LU et résoudre $A^2x = b$, ou la méthode précédente ?

5. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Sont-elles irréductibles ?
   (b) Si A ou B est réductible, indiquez la permutation des inconnues qui permette de résoudre un système linéaire de matrice A ou B par la résolution de 2 sous systèmes linéaires.