PARTIEL. 18 Novembre 1998 (2 Heures)

Introduction

Le but de ce problème est de construire une méthode de résolution de systèmes linéaires basée sur la question suivante : si l'on sait résoudre un système d'ordre k, sait-on résoudre le système d'ordre $k+1$ obtenu en "rajoutant" une ligne et une colonne au système de départ et en "rallongeant" le second membre? Si la réponse à cette question est oui, alors en partant d'un système d'ordre 1, on saura résoudre un système d'ordre n.

Toutes les matrices considérées sont réelles. Soit A_k une matrice carrée d'ordre k inversible, z_k un vecteur colonne d'ordre k, v_k un vecteur ligne d'ordre k et a_k un réel. On assimilera comme d'habitude les matrices 1×1 à des réels. Soit A_{k+1} la matrice carrée d'ordre $k+1$ obtenue en rajoutant une ligne et une colonne à A_k :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & z_k \\ v_k & a_k \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite, on utilisera ce "découpage" pour décrire les matrices. On suppose que A_k admet une décomposition LU notée $L_k U_k$. On pose $\alpha_k = a_k - v_k A_k^{-1} z_k$.

1. Expliquez comment on fait "pratiquement" pour calculer α_k.

2. On suppose que A_{k+1} admet une décomposition LU notée $L_{k+1}U_{k+1}$. En écrivant L_k et U_k sous la forme:

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & b \end{pmatrix} \quad U_{k+1} = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

   où X et M sont des matrices carrées dont on précisera la forme, où Y est un vecteur ligne, où N un vecteur colonne et où b et c sont des réels, calculez explicitement L_{k+1} et U_{k+1} en fonction de L_k, U_k, v_k, z_k et α_k. Calculez α_k en fonction de $\det A_k$ et $\det A_{k+1}$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A_{k+1} soit inversible et admette une décomposition LU.
   On suppose cette condition remplie dans toute la suite.

4. De même, calculez L_{k+1}^{-1} et U_{k+1}^{-1}. En déduire une expression de A_{k+1}^{-1} en fonction de A_k^{-1}, z_k, v_k et α_k.
   Soit x_k la solution de $A_k x_k = b_k$ où b_k est un vecteur colonne de dimension k. Soit x_{k+1} la solution de $A_{k+1}x_{k+1} = \begin{pmatrix} b_k \\ f_k \end{pmatrix} = b_{k+1}$ où f_k est un réel. On pose $\beta_k = f_k - v_k x_k$.

5. Montrez que :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta_k}{\alpha_k} \begin{pmatrix} -A_k^{-1} z_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Soit y_k la solution de $L_k y_k = b_k$ et y_{k+1} celle de $L_{k+1}y_{k+1} = b_{k+1}$.

6. Montrez que les vecteurs $\begin{pmatrix} v_k \\ a_k \\ -f_k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

7. Calculez y_{k+1} en fonction des quantités d'indices k. Calculez $U_{k+1}^{-1} y_{k+1}$ et retrouvez le résultat de la question précédente.

8. Décrire en détails la méthode de résolution envisagée dans l'introduction, en présisant bien quels calculs sont effectivement mis en oeuvre lors de l'implantation informatique.